Correction Rapide du CC 1 PSIN 2017

Exo 1. On note :

1) D : l'événement l'ours acheté est défectueux.
A : ———————— vient de l'usine A
B : ———————————————— B

Les données du problème sont :

$\mathbb{P}(D|A) = p \qquad \mathbb{P}(D|B) = q \qquad \mathbb{P}(A) = r \qquad \mathbb{P}(B) = 1-r$

$B = A^c$.

2) $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|A^c)\,\mathbb{P}(A^c)$

$= pr + q(1-r)$

3) $\mathbb{P}(A|D) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \dfrac{\mathbb{P}(D|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)} = \dfrac{pr}{pr + q(1-r)}$

Exo 2 :

1) $\text{Supp}(X) = \text{Atom}(X) = \mathbb{N}$

2) Voir cours

3) $\varnothing$

4) $\mathbb{P}(Y=4) = \dfrac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda}$ ici $\lambda = 1$

$= \dfrac{1}{4!\,e}$

$\mathbb{P}(Y=0) = \dfrac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = \dfrac{1}{e}$

5) $\mathbb{P}(Y\leq 5) = \mathbb{P}(Y=0) + \cdots + \mathbb{P}(Y=5) = \dfrac{1}{e}\left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!}\right)$

$= \dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \cdots + \dfrac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$

$$\mathbb{P}(Y \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(Y < 3)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2)$$
$$= 1 - \frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right)$$

Exo 3.

1) $f \geqslant 0$ donc il faut simplement calculer μ pour avoir $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 2\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 2$$

Donc $\mu = 1/2$

2) $Supp\, Z = \mathbb{R}$

3)

$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) =$

si $t \leq 0$, on a

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2} e^{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x}\right]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}e^{t}$$

Si $t \geqslant 0$, on a:

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx + \int_{0}^{t} \frac{1}{2}e^{-x}\,dx$$
$$= 1/2 + \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_0^t$$
$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-t}$$

Bilan. $F_Z(t) = \begin{cases} 1/2\, e^{t} & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

4) Z est intégrable si et seulement si

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |x|\, e^{-|x|}\, dx < \infty$$

Or $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |x|\, e^{-|x|}\, dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} = 1 < \infty$

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{x\, e^{-|x|}}_{\text{impaire}}\, dx = 0$$

5) $\mathbb{P}(Z = 1/2) = 0$ car Z est une v.a à densité

6) $\mathbb{P}(Z \in]-1, 2[) = F_Z(2) - F_Z(-1)$ car Z

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}\right)$$

7) $\mathbb{E}(Z^2) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-|x|}\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx$

$$= \underbrace{\left[-x^2 e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} 2x\, e^{-x}\, dx$$

$$= 2\underbrace{\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx}_{=1} = 2$$

$$Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = 2 - 0^2 = 2$$

8) On pose $U = |Z|$

Clairement, $supp(U) = \mathbb{R}_+$, puisque $supp(Z) = \mathbb{R}$.

Soit h continue bornée.

$$\mathbb{E}(h(U)) = \mathbb{E}(h(|Z|))$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} h(|x|)\, e^{-|x|}\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} h(x)\, e^{-x}\, dx$$

Donc $U \sim \exp(1)$

9) $V = \lfloor U \rfloor$, loi de V ?

$\begin{cases} Supp(V) = Atom(V) = \mathbb{N} \quad \text{car} \quad supp(U) = \mathbb{R} \\ \text{et} \\ V \text{ est discrète.} \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(V = n) = \mathbb{P}(U \in [n, n+1[)$$

$$= \int_n^{n+1} e^{-x}\, dx$$

$$= e^{-n}(1 - e)$$

Donc $\mathbb{P}(V+1 = k) = \left(e^{-1}\right)^{k-1} (1-e)$

Donc $V+1 \sim \mathcal{G}(1-e)$