TD 4

Fonctions caractérisques, Estimation, somme de v.a.i et loi conditionelle

1. **ESTIMATION**
   Un joueur lance une pièce équilibrée : lorsqu'il obtient pile, il gagne 100 Euros, lorsqu'il obtient face, il perd 100 Euros. On veut estimer le nombre maximal de lancers à effectuer pour que ce joueur ait plus de 95 chances sur 100 de perdre au plus 2000 Euros.

   (a) Notons n le nombre de lancers effectués, la v.a. S_n égale au nombre de piles obtenus sur les n premiers lancers. Quelle est la loi de S_n ?
   (b) On note G_n le gain du joueur. Exprimer G_n à l'aide de S_n et n.
   (c) Quelle est l'estimation de n fournie par le TCL ? *Si G suit une loi normale centrée réduite alors* $\mathbb{P}(G \leqslant \alpha) = 0,95$ *pour* $\alpha \simeq 1.65$.

2. Soient $X_1, ..., X_{100}$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$. On cherche à évaluer $\mathbb{P}(\frac{X_1+...+X_{100}}{100} > 0,53)$.

3. On lance cent fois une pièce de monnaie équilibrée.
   (a) Majorer, à l'aide de l'inégalité de Tchebychev, la probabilité d'avoir plus de 70 fois Face ou moins de 30 fois Face à l'issue de ces tirages.
   (b) À l'aide du théorème central limite, estimer la même probabilité.

4. **FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES**
   Soit X une variable aléatoire rélle. Calculez la fonction $\xi \to \mathbb{E}(e^{i\xi X})$, puis, quand c'est possible, dérivez-la en 0 pour calculer l'espérance et la variance de X, quand la loi de X est :
   (a) uniforme sur $\{1, \cdots, N\}$;
   (b) géométrique de paramètre p ;
   (c) de Poisson de paramètre λ ;
   (d) uniforme sur $[0, 1]$;
   (e) exponentielle de paramètre λ ;
   (f) de Laplace de paramètre λ ;
   (g) normale de paramètres (μ, σ^2). Indication : on pourra d'abord calculer $\mathbb{E}(e^{\lambda X})$ pour des λ réels, puis prendre pour acquis que la même formule reste vraie pour λ complexe.
   (h) la loi de Z^2, où Z suit une loi normale de paramètres $(0, \sigma^2)$ [1] Indication : utiliser la même méthode que pour la loi normale.
   (i) de Cauchy standard.

5. **SOMME DE V.A. INDÉPENDANTES**
   Soit $M > 0$ un entier. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et qui suivent toutes deux une loi uniforme sur $\{0, \cdots, M\}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X + Y$? Et celle de la variable aléatoire $X - Y$?

6. Dans ce qui suit, X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes. Dans chacun des cas suivants, calculez la densité de la loi de $X + Y$ dans le cas continu, ou décrivez la loi de $X + Y$ dans le cas discret.
   (a) X et Y ont la même loi que Z^2, où Z suit une loi normale normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
   (b) X et Y suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On dit que X et Y suivent une loi du χ^2 à un degré de liberté. Une densité de cette loi est donnée par la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} 1_{[0,+\infty)}(x)$.

(c) X suit une loi géométrique de paramètre $p \in (0,1)$, et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

7. **LOI CONDITIONNELLE**
Une poule pond un nombre d'oeufs X tous les mois. On suppose que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geqslant 0$. Chaque oeuf donne naissance à un poussin avec probabilité $p \in [0,1]$, indépendamment des autres oeufs. Soit Y le nombre total de poussins nés dans le mois.
   (a) Calculez la loi de Y sachant X.
   (b) Déduisez-en la loi de Y.
   (c) Quelle est la loi de X sachant Y ? loi de $X - Y$ sachant Y ?
8. Dans une population on trouve une proportion de $\frac{1}{10\,000}$ individus qui portent un certain virus. Il y a un test pour la présence de ce virus. Ce test n'est pas parfait : si un individu porte le virus, alors le test le détecte avec une probabilité de $0,99$. Si un individu ne porte pas le virus, le test donne un résultat positif (érroné) avec probabilité de $0,001$.
   (a) Si on tire un individu au hasard de la population, on lui fait passer le test, et le résultat est positif, quelle est la probabilité qu'il porte vraiment le virus ?
9. À première vue, le résultat obtenu en (a) est extrêmement surprenant ! Avez-vous une explication ?
10. Un examen se déroule sous la forme d'un questionnaire à choix multiples. Il y a en tout 20 questions. Chaque question comporte 4 réponses possibles, dont une et une seule bonne réponse. Une réponse juste rapporte 1 point, et une réponse fausse aucun. On suppose que le programme pour l'examen comporte 100 points, parmi lesquels on tire au hasard, et indépendamment, 20 points correspondant aux 20 questions de l'examen.
Un étudiant, souffrant d'un manque de motivation. décide de ne réviser que les $100p$ premiers points du programme, où $p \in [0,1]$. Au cours de l'examen, si une question porte sur un point qu'il a révisé, alors il est capable de trouver la bonne réponse à coup sûr ; sinon, il choisit une réponse au hasard parmi les quatre possibles.
   (a) Soit X le nombre de questions de l'examen portant sur un point que l'étudiant a révisé. Quelle est la loi de X ? Déduisez-en $\mathbb{E}(X)$.
   (b) Soit Y le nombre de bonnes réponses données (au hasard) par le candidat parmi les points non révisés. Quelle est la loi de Y sachant X ?
   (c) Montrez que $\mathbb{E}(Y|X) = 5 - \frac{X}{4}$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.
   (d) Soit N la note du candidat. Montrez que $\mathbb{E}(N) = 15p + 5$.
11. La loi exponentielle/géométrique est sans mémoire.