TD 3
Inégalité, Lois marginales, indépendance

1. On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur le plan. Calculez, dans les trois cas suivant, l'intégrale double $\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$:
   (a) $D = [1,2] \times [0,3]$ et $f(x,y) = xy + y^2 - 1$.
   (b) $D = [1,2] \times [0,2]$ et $f(x,y) = ye^{xy}$.
   (c) $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 \ : \ x > y\}$ et $f(x,y) = (x-2y)^2$.

2. **Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev**
   Le nombre hebdomaire de ventes de voitures pour un certain concessionnaire est une variable aléatoire X d'espérance $\mathbb{E}(X) = 16$ et variance $\mathrm{Var}(X) = 9$. Donner une borne inférieure à la probabilité que les ventes de la semaine prochaine se situent entre 10 et 22, bornes incluses.

3. Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre (n,p). Montrer que :
   (a) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$
   (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$

4. **Loi d'un couple et lois marginales**
   Soit (X,Y) une couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $yx^{y-1}e^{-y}1_{[0,1]}(x)1_{[0,+\infty)}(y)$.
   (a) Dessinez le support de la loi de (X,Y).
   (b) Calculez la loi de Y.
   (c) Calculez $\mathbb{E}(X(Y+1))$.

5. Soit (X,Y) une couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $ke^{-y}1_{0<x<y}$, où k est un réel.
   (a) Dessinez le support de la loi de (X,Y).
   (b) Calculez k.
   (c) Calculez les densités marginales de (X,Y).
   (d) Déterminez la loi de $T := Y - X$.

6. Soit (X,Y) une couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité $\pi^{-1}1_{x^2+y^2\leqslant 1}$.
   (a) Pour tout réel λ, calculez graphiquement $\mathbb{P}(X > \lambda Y)$.
   (b) Calculez graphiquement $\mathbb{P}(X > 1/\sqrt{2})$.

7. Soit $\lambda > 0$. Soit (X,Y) une couple de variables aléatoires réelles, dont la loi a pour densité :
   $(x,y) \mapsto \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}1_{[0,+\infty)}(x)1_{[0,+\infty)}(y)$.
   (a) Que peut-on dire des variables aléatoires X et Y ?
   (b) Calculez la loi du couple $(X+Y, X-Y)$.

8. **Indépendance**
   Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme dans $[0,1]$. Quelle est la loi du couple de variables aléatoires $(\min\{X,Y\}, \max\{X,Y\})$?

9. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et qui suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in (0,1)$. On pose :

$$\begin{aligned} S &:= \min\{X,Y\}, \\ T &:= |X-Y|. \end{aligned}$$

   (a) Calculez la loi du couple (S,T), c'est-à-dire la valeur de $\mathbb{P}((S,T)=(s,t))$ pour tous entiers s et t positifs. Indice : distinguer les cas $t=0$ et $t>0$.
   (b) Déduisez-en la loi de S et celle de T. Calculez $\mathbb{E}(T)$.
   (c) Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

10. Soit $n \geqslant 1$. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1. On pose $X^{(1)} := \min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$, et $X^{(n)} := \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$.
   (a) Calculez les fonctions de répartition de $X^{(1)}$ et $X^{(n)}$ en fonction de F.
   (b) Si la loi des X_k a une densité f, exprimez les densités de $X^{(1)}$ et $X^{(n)}$ en fonction de f.
   (c) Faites les calculs quand les X_k suivent une loi uniforme sur $[0,1]$,
   (d) et quand elles suivent une loi exponentielle de paramÃ¨tre α. Que remarquez vous pour $X^{(1)}$?

11. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes deux une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Montrez que $\frac{X}{Y}$ suit une loi de Cauchy.

12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent une loi exponentielle de paramètres respectifs α et β. On pose $S := \min\{X,Y\}$ et $T := |X-Y|$.
   (a) Calculez la loi du couple (S,T).
   (b) Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

13. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes chacune de loi normale de paramètres $(0,1)$. Montrez que les variables aléatoires $(X+Y)/\sqrt{2}$ et $(X-Y)/\sqrt{2}$ sont indépendantes, et suivent chacune une loi normale de paramètres $(0,1)$.

14. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Dans les trois cas suivants, décrivez la loi du couple (X,Y) :
   (a) X suit une loi géométrique de paramètre p, et Y suit une loi binomiale de paramètres (n,q) ;
   (b) X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et Y suit une loi exponentielle de paramètre μ ;
   (c) X et Y suivent une loi normale de paramètres $(0,1)$ et $(1,1)$ respectivement.

15. **CALCUL DE** $\mathbb{P}(X=Y)$
   Soient X et Y deux variables aléatoires rélles indépendantes. On suppose que la loi de X est à densité.
   (a) Montrez que, pour tout réel a, on a $\mathbb{P}(X=a)=0$.
   (b) Déduisez-en, en utilisant le théorème de Tonelli, que $\mathbb{P}(X=Y)=0$.
   (c) Si X et Y ont la même loi, que peut-on dire de $\mathbb{P}(X>Y)$?

16. Deux personnes se sont données rendez-vous entre 14h et 15h. Ne se souvenant plus de l'heure précise, chacune décide d'arriver à un moment au hasard uniforme entre 14h et 15h. Les deux décisions sont indépendantes. Quelle est la probabilité que la personne arrivant le plus tôt ait à attendre moins d'un quart d'heure ?