TD 2
Variables aléatoires, Espérances

1. Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisé de probabilité respective p, q, r. On suppose que c'est 3 événements sont indépendants.
   (a) Montrer que si A et B sont indépendants alors A et B^c sont aussi indépendants et que A^c et B^c sont aussi indépendants.
   (b) Exprimer la probabilité de l'événement $A \cup (B \cap C)$ à l'aide de p, q, r.
   (c) Exprimer la probabilité de l'événement $A \cap (B \cup C)$ à l'aide de p, q, r. En dÃ©duire que les événements A et $B \cap C$ sont indépendants.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z} - \{0\}$, dont la loi est donnée par :
$$\mathbb{P}(X = n) = 2^{-|n|-1} \ \ \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$
   (a) Vérifier que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité.
   (b) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y := X^2$?
   (c) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Z := 2 + \pi \cos(\pi X)$?

3. Quelle est la fonction de répartition d'une variable aléatoire
   (a) qui vaut π avec probabilité 1 ?
   (b) qui suit une Bernoulli ?
   (c) qui suit une loi uniforme ?
   (d) qui suit une loi exponentielle de paramètre 1 ?
   (e) qui suit une loi de Poisson ?

4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. Calculez la fonction de répartition de $\max\{X, 1/X\}$, de $\min\{X, 1/X\}$.

5. (a) Soit $p \in [0, 1]$. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $\mathbf{1}_{[0,p]}(X)$?
   (b) Soient a et b deux réels. Construisez, à partir de X, une variable aléatoire valant a avec probabilité p et b avec probabilité $1 - p$.
   (c) On se donne cette fois-ci un triplet $(p, q, r) \in [0, 1]^3$ tel que $p+q+r = 1$, ainsi que trois réels a, b et c. Construisez, à partir de X, une variable aléatoire valant a avec probabilité p, valant b avec probabilité q, et valant c avec probabilité r.

6. Pour tout réel α, on définit une fonction p_α par $p_\alpha(x) := \alpha x^{\alpha-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ pour tout réel x.
   (a) Pour quelles valeurs du paramètre α la fonction p_α est-elle une densité de probabilité ?
   (b) Soit α un tel paramètre. Soit X une variable aléatoire dont la loi est de densité p_α. On pose $Y := -\alpha \ln(X)$. Calculez la densité de Y, et montrez qu'elle ne dépend pas de α. Quelle loi usuelle suit Y ?

7. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geqslant 0$.
   (a) Montrez que $\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda$.
   (b) Calculez $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

8. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-2, 2]$.
   (a) Calculez la densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X.
   (b) Faites de même avec X^2.

9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y := e^X$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculez le moment d'ordre k de Y.
   (b) Calculez la densité de Y.

10. Soit X une variable aléatoire dont la loi admet une densité f sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est symétrique par rapport à un certain réel m, c'est-à-dire que $f(m+x) = f(m-x)$ pour tout réel x. On suppose de plus que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. Montrez que $\mathbb{E}(X) = m$.

11. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in (0,1)$.
    (a) Retrouvez par un calcul direct la valeur de $\mathbb{E}(X)$.
    (b) Pour quels réels s la valeur $\mathbb{E}(s^X)$ est-elle bien définie ?
    (c) Calculez $f(s) := \mathbb{E}(s^X)$ pour ces valeurs de s.
    (d) Que vaut $f'(0)$?

12. La durée de vie d'un composant électronique, notée T, est une variable aléatoire. On suppose qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire qu'elle est de densité $\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty)}(x)$.
    (a) On sait que 1% des composants ont une durée de vie inférieure à 120 heures et 36 minutes. Déterminez la durée de vie moyenne, en heures, d'un composant.
    (b) Trouvez le réel t tel que 80% des composants ont une durée de vie supérieure à t.