TD 1
Évènements, tribus et variables aléatoires

Évènements et ensembles

1. Une cible est constituée de 10 disques concentriques de rayons $r_k, k = 1, \dots, 10$ croissants. L'évènement A_k signifie que "le projectile a touché la cible à l'intérieur du disque de rayon r_k", pour $k = 1, \dots, 10$. Quelle est la signification des évènements :

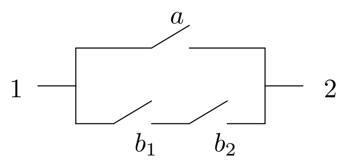
$$B := \cup_{k=1}^{5} A_k \text{ et } C = \cap_{k=1}^{10} A_k \text{ ?}$$

2. Soit Ω un ensemble. Soient A, B et C trois évènements, ou parties, de Ω. Exprimez les évènements suivants. Parmi A, B, C,
   (a) A seul se produit ;
   (b) A et B se produisent et C ne se produit pas ;
   (c) les trois évènements se produisent ;
   (d) l'un au moins des évènements se produit ;
   (e) au moins deux des évènements se produisent ;
   (f) un seul évènement se produit ;
   (g) aucun des évènements ne se produit ;

3. Sous quelles conditions les évènements A et B satisfont-ils l'égalité $A = A \cup B$? Et l'égalité $A = A \cap B$?

4. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une collection d'ensembles. Déterminez $(\cup_{i \in I} A_i)^c$ et $(\cap_{i \in I} A_i)^c$.

5. La figure suivante décrit un circuit électrique entre les points 1 et 2 comportant les fusibles a, b_1, b_2 qui peuvent tomber en panne.



On note A (respectivement B_i) l'évènement "le fusible a (respectivement le fusible b_i) est en panne", et C l'évènement "le courant passe de 1 à 2". Écrivez les évènements C^c et C en termes des évènements A, B_1, B_2.

Les quatre types de dénombrement

6. On tire des objets au hasard dans un ensemble. Les tirages peuvent être discernables (l'ordre dans lequel les objets sont tirés importe), ou non (seuls les objets tirés importent). Les tirages peuvent aussi être faits avec remise (on peut tirer plusieurs fois le même objet) ou non. En combinant ces deux possibilités, on obtient les quatre types de dénombrement suivants [1] :
— n tirages discernables à choisir parmi M possibilités avec remise ($n \geq 0, M > 0$) :

$$\Omega_1 := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \ : \ \omega_i \in \{1, \dots, M\} \ \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

— n tirages discernables à choisir parmi M possibilités sans remise ($0 \leq n \leq M$) :

$$\Omega_2 := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \ : \ \omega_i \in \{1, \dots, M\} \ \forall 1 \leq i \leq n, \ \omega_i \neq \omega_j \ \forall i \neq j\}.$$

— n tirages indiscernables à choisir parmi M possibilités avec remise ($n \geq 0, M > 0$) :

$$\Omega_3 := \{[\omega_1, \dots, \omega_n] \ : \ \omega_i \in \{1, \dots, M\} \ \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

— n tirages indiscernables à choisir parmi M possibilités sans remise ($0 \leq n \leq M$) :

$$\Omega_4 := \{[\omega_1, \dots, \omega_n] \ : \ \omega_i \in \{1, \dots, M\} \ \forall 1 \leq i \leq n, \ \omega_i \neq \omega_j \ \forall i \neq j\}.$$

1. La notation $[\omega_1, \dots, \omega_n]$ correspond à des multiensembles, c'est-à-dire à des ensembles dont les éléments peuvent avoir une multiplicité, mais dont l'ordre n'importe pas. Ainsi, $[1, 2, 2] = [2, 1, 2] \neq \{1, 2\}$.

(a) Quatres fonctions dépendant de n et de M sont écrites ci-dessous :

$$\binom{M+n-1}{n} \quad ; \quad M^n \quad ; \quad \binom{M}{n} \quad ; \quad \frac{M!}{(M-n)!}$$

Chacune de ces fonctions est le cardinal de l'un des ensembles Ω_i. Associez chaque fonction au cardinal de l'ensemble correspondant, et donc au type de dénombrement correspondant. Justifiez votre solution.

(b) Pour chacun des ces types de dénombrement, donnez un exemple concret d'application.

7. 20 chevaux sont au départ d'une course. Trouvez le nombre de tiercés, de quartés et de quintés dans l'ordre et dans le désordre.

8. N étudiants ($N \geq 2$) suivent un cours de statistiques. Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants ont leur anniversaire le même jour ? On néglige les années bissextiles, on suppose que tous les jours de l'année sont équiprobables en tant que jour de naissance, et on suppose que les dates de naissances des étudiants sont indépendantes (pas de jumeaux !). Indication : commencer par calculer la probabilité de l'évènement "les anniversaires des étudiants sont à des dates distinctes".

Opérations sur les tribus

9. Soient $\mathbb{X}$ un ensemble non vide et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{X}$. On définit :

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

(a) Décrire (en français ordinaire) ce que signifient les affirmations $a \in \limsup_{n\to+\infty} A_n$ et $a \in \liminf_{n\to+\infty} A_n$.

(b) Montrez que $\liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(c) Déterminez $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ dans les exemples suivants :
- la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion ;
- la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion ;
- on se donne deux sous-ensemble A et B de $\mathbb{X}$, et on pose $A_{2n} = A$ et $A_{2n+1} = B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, et pour tout n :

$$A_n = \left[2 + (-1)^{n+1}, 3 + \frac{1}{n+1}\right].$$

10. Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux ensembles non vides, et soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une application.

(a) Soient $A \subset \mathbb{X}$ et $B \subset \mathbb{Y}$. Rappelez la définition de $f(A)$ et de $f^{-1}(B)$.

(b) Montrez que pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de $\mathbb{Y}$,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

(c) Montrez que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $\mathbb{X}$,

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

11. Si $A, B \in \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ une tribu, montrez que $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont aussi éléments de la tribu.

12. Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et soit $B \in \mathcal{F}$. Montrez que $\mathcal{F}_{B|} := \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur B.

13. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur Ω avec $I \neq \emptyset$ (pas nécessairement dénombrable). Montrez que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu sur Ω.

14. Soit Ω un ensemble dénombrable et $\mathcal{G} := \{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$ la famille des singletons. Déterminez la tribu $\sigma(\mathcal{G})$ engendrée par $\mathcal{G}$.

15. Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux ensembles (non-vides), $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une application et $\mathcal{Y}$ une tribu sur $\mathbb{Y}$. Montrez que :

(a) $f^{-1}(\mathcal{Y})$ est une tribu sur $\mathbb{X}$;

(b) $f^{-1}(\mathcal{Y}) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{G}))$ pour toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de $\mathcal{Y}$.