



Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 2 heures

Questions de cours

- Énoncer la loi des grands nombres (faible ou forte).
- Énoncer le théorème central limite.
- Donner la définition de la loi de Poisson.
- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre λ et μ . Quelle est la loi de $X + Y$? Justifier.
- Donner une définition de la convergence en loi.

Exercice 1

Soit (E_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi de Bernoulli de paramètre p . On note $X = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid E_n = 1\}$ et $Y = \inf\{n > X \mid E_n = 1\}$.

1. Donner une interprétation à l'aide du jeu de pile ou face des variables aléatoires X et Y .
2. Quelle est la loi de X ?
3. Quelle est le support de Y ?
4. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer explicitement $\mathbb{P}(Y = k)$.

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire à densité, de densité la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante $f(x, y) = Cx(x + y)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$.

1. Vérifier que f est un bien une densité de probabilité si le réel C est bien choisi (donner la valeur de C).
2. Donner et dessiner le support du couple (X, Y) .
3. Calculer les lois marginales du couple (X, Y) .
4. Les variables X et Y sont elles indépendantes?
5. Calculer la loi de $M = \max(X, Y)$.
6. Calculer la loi de $\Sigma = X + Y$.

Exercice 3

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \leq Y)$ lorsque :

1. X et Y suivent une loi uniforme sur $\{0, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$.
2. X et Y suivent une loi uniforme sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
3. X et Y suivent des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2 .

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ .

1. Soient $k, n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = k | X + Y = n)$.
2. En déduire la loi de X sachant que $X + Y = n$.
3. Soit Z une variable aléatoire. On suppose que la loi de Z sachant que $X = n$ est une binomiale de paramètre (p, n) . Quelle est la loi de Z ?