UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Probabilité et statistique pour l'ingénieur

Examen Terminal : 4 mai 2016

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 2 heures

Questions de cours

- Énoncer la loi des grands nombres (faible ou forte).
- Énoncer le théorème central limite.
- Donner la définition de la loi de Poisson.
- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Quelle est la loi de $X+Y$? Justifier.
- Donner une définition de la convergence en loi.

Exercice 1

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à densité, de densité la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante $f(x,y) = C\frac{1}{2x}e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbf{1}_{[0,2x]}(y)$.

On introduit la fonction suivante qui sera sûrement utile : $\varphi(t) = \displaystyle\int_t^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité si le réel C est bien choisi.
2. Donner la valeur de C.
3. Donner et dessiner le support du couple (X,Y).
4. Calculer les lois marginales du couple (X,Y). Les identifier si c'est possible.
5. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
6. Calculer la loi de $M = \max(X,Y)$. *On ne demande pas de reconnaître une loi usuelle.*

Bonus Quelle est la loi de Y sachant X ? (On justifie même les questions bonus !)

Exercice 2

On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}_+$ est *sans mémoire* lorsque :

$$\forall\, s,t > 0, \qquad \mathbb{P}(X > s+t \,|\, X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

1. Soit X une variable aléatoire sans mémoire. Supposons X à densité et notons f sa densité. On définit la fonction suivante $\hat{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par la formule : $\hat{F}(t) = \mathbb{P}(X > t)$.

2. Montrer que pour tout $s, t > 0$, on a $\hat{F}(s+t) = \hat{F}(s) \cdot \hat{F}(t)$.
3. Montrer que $\hat{F}$ est dérivable et vérifie $\hat{F}' = -f$.
4. En déduire une équation différentielle vérifiée par $\hat{F}$.
5. En déduire que X suit une loi usuelle que l'on explicitera.

Exercice 3

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$ lorsque :

1. X et Y suivent une loi uniforme sur $\{0, ..., N\} \subset \mathbb{N}$.
2. X et Y suivent une loi uniforme sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
3. X et Y suivent des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2.

Exercice 4

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme suivant :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0, 1]$. On considère S_n^x une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre (n, x). Montrer que :
$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n^x}{n}\right)\right) = B_n(x)$$
2. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(f\left(\frac{S_n^x}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $f(x)$.
3. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, on a :
$$B_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$$