UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Probabilité et statistique pour l'ingénieur

Contrôle Continu n°3 : jeudi 24 mars 2016

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 1 Heure 30 Minutes

Questions de cours

— Soient A et B deux événements indépendants et disjoints. Que pouvez dire sur la probabilité de A ou de B ?

— Énoncer la loi des grands nombres (faible ou forte).

— Énoncer le théorème central limite.

— Soient (X_i, Y_i) des couples de variables aléatoires dont les lois sont données par les formules suivantes (où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des réels strictement positifs qu'on ne demande pas de calculer) :

1. $\mathbb{P}\Big((X_1, Y_1) \in A \times B\Big) = \int_{\mathbb{R}^2} C_1 e^{-x^2} e^{-|y|}\, \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(y) dx dy$
2. $\mathbb{P}\Big((X_2, Y_2) \in A \times B\Big) = \int_{\mathbb{R}^2} C_2 (x+y) e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{D_2}(x, y)\, \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(y) dx dy$
   où $D_2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
3. $\mathbb{P}\Big((X_3, Y_3) \in A \times B\Big) = \int_{\mathbb{R}^2} C_3 e^{x} e^{-y} \mathbb{1}_{D_3}(x, y)\, \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(y) dx dy$
   où $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x|^2 + |y|^2 \leqslant 1\}$
4. $\mathbb{P}\Big((X_4, Y_4) \in A \times B\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cap A} \int_{\mathbb{R}} C_4 \frac{2^n}{n!} e^{-|y|} \mathbb{1}_B(y) dy$

En justifiant brièvement, dire si X_i et Y_i sont indépendantes pour $i = 1, \ldots, 4$.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule :

$$f(x) = \frac{3}{2} x^2\, \mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

1. Quel est le support de la loi de X ?
2. Vérifier que f définie bien une probabilité.
3. Calculer et dessiner la fonction de répartition de X.
4. Quelle est la probabilité que $X = \frac{1}{2}$?
5. Quelle est la probabilité que $X \in]-2, \frac{1}{2}[$?
6. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On note $M = \max(X, Y)$ et $m = \min(X, Y)$. On note F la fonction de répartition de X et G celle de Y.

1. Calculer la fonction de répartition de M à l'aide de F et G.
2. Sous l'hypothèse que X et Y sont à densité, la variable aléatoire M est-elle à densité ? Si oui, la calculer.
3. Calculer la fonction de répartition de m à l'aide de F et G.
4. Sous l'hypothèse que X et Y sont à densité, la variable aléatoire m est-elle à densité ? Si oui, la calculer.

Soient $\lambda, \mu > 0$. On suppose à présent que X suit une loi exponentielle de paramètre λ et Y une loi exponentielle de paramètre μ.

5. Quelle est la loi de m ?

Exercice 3

Soit $\lambda > 0$. On considère la fonction : $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y) = \lambda e^{-y} \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y).$$

1. Montrer qu'il existe un réel λ tel que f soit la densité d'une probabilité sur $\mathbb{R}^2$. Ce réel est-il unique ? Calculer sa valeur.

On fixe à partir de maintenant λ à la valeur calculée dans la question précédente. On se donne un couple $(X, Y) : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^2$ de variables aléatoires de densité f.

2. Quel est le support de la loi du couple (X, Y) ?
3. Quelle est la loi de X ? de Y ? Si X ou Y suit une loi usuelle, donner le.s nom.s et le.s paramètre.s de cette.ces loi.s usuelle.s.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.
5. Calculer l'espérance de X, de Y et de XY.

Vous pouvez ne traiter qu'une des deux questions suivantes et avoir la totalité des points.

6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Quelle est la probabilité de l'événement $\{Y - X \leqslant t\}$

6' Quelle est la loi de $Y - X$?