Probabilité et statistique pour l'ingénieur

Interrogation n°1 : mercredi 3 février 2016

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 1 heure

Questions de cours

Soient $0 < q < 1$ et N un entier naturel.

— Rappeler et démontrer la formule qui permet de calculer : $\sum_{i=0}^{N} q^i$.

— Rappeler et démontrer la formule qui permet de calculer : $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$.

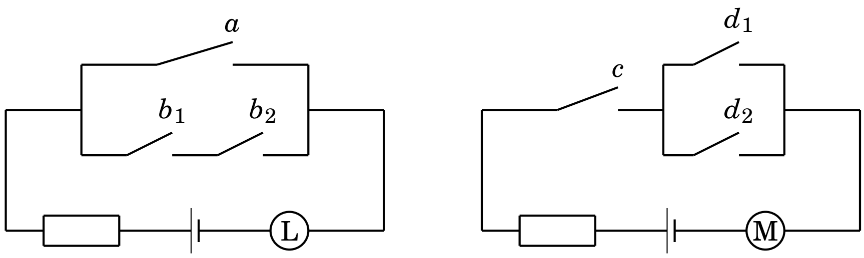
— Rappeler la définition de la loi de Poisson.

— Rappeler la définition de la loi équirépartie sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

— Rappeler la définition d'atome d'une variable aléatoire.

Exercice 1

Les figures suivantes décrivent deux circuits électriques.



On note :

— A l'événement : « l'interrupteur a est fermé ».

— B_1 l'événement : « l'interrupteur b_1 est fermé ».

— B_2 l'événement : « l'interrupteur b_2 est fermé ».

— C l'événement : « l'interrupteur c est fermé ».
— D_1 l'événement : « l'interrupteur d_1 est fermé ».
— D_2 l'événement : « l'interrupteur d_2 est fermé ».

— X l'événement : « la lumière L est allumée ».
— Y l'événement : « la lumière M est allumée ».

1. Ecrire X à l'aide des événements A, B_1, B_2.
2. Ecrire Y à l'aide des événements C, D_1, D_2.
3. On note p (resp. q_i) la probabilité de A (resp. B_i). On suppose que les événements A, B_1, B_2 sont indépendants. Quelle est la probabilité de X ?
4. On suppose que $p = q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$, calculer explicitement la probabilité de X.
5. On note r (resp. s_i) la probabilité de C (resp. D_i). On suppose que les événements C, D_1, D_2 sont indépendants. Quelle est la probabilité de Y ?
6. On suppose que $r = s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$, calculer explicitement la probabilité de Y.

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère $Z : \Omega \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{P}$ vérifie : $\mathbb{P}(Z = k) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité.
2. Quelle est le nom de la loi de Z ? Le paramètre de cette loi ?
3. Quelle est la probabilité que $Z = 2$? que $Z \in \{1, 2, 3\}$? que $Z > 2$?
4. Quelle est la probabilité que Z soit impair ?
5. Quelle la valeur de Z la plus probable ?
6. Quelle est la loi de la variable aléatoire $U = (-1)^Z$?
7. Tracer (en justifiant vos figures) les fonctions de répartition de U et de Z.