UNIVERSITÉ DE RENNES 1

AR 4

Examen terminal durée 2h

Mercredi 19 décembre: 8h - 10h

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les exercices proposés sont indépendants.

Question de cours

(1) Est-ce que le groupe additif $(\mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}}, +)$ possède des éléments d'ordre $2, 3, 4, 6, 7, 10$? Donner un exemple de tels éléments lorsque c'est possible.

(2) Montrer soigneusement que tout groupe d'ordre 11 est isomorphe à $\mathbb{Z}/_{11\mathbb{Z}}$.

(3) Donner la décomposition canonique des groupe $\mathbb{Z}/_{21\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{15\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{30\mathbb{Z}}$.

(4) Décrire les orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$. Justifier.

(5) Décrire les orbites de l'action de $U = \{u \in \mathbb{C} \text{ tel que } |u| = 1\}$ sur $\mathbb{C}$. Justifier.

(6) Donner deux exemples de couples (G, H) tel que G et H ont le même ordre mais ne sont pas isomorphes.

(7) Montrer que tout groupe 50 n'est pas simple.

(8) Que signifie la phrase "G est groupe simple" ?

Exercice 1

(1) Rappeler l'ordre de $\mathfrak{A}_n$.

(2) On considère les deux permutations suivantes:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Décomposer σ et τ en produit de cycles à supports disjoints.

(3) En déduire l'ordre de σ et l'ordre de τ.

(4) On note G le groupe engendré par σ et τ. Montrez que l'action G sur $\{1, ..., 9\}$ est transitive.

(5) En déduire que le cardinal de G est divisible par $4, 15$ et 9.
(6) En déduire que le cardinal de G est divisible par 180.
(7) Est-ce que l'action de G sur $\{1, ..., 9\}$ est fidèle ?
(8) Est-elle libre ?
(9) Est-ce que G est inclus dans $\mathfrak{A}_9$?

Exercice 2

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on pose $M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que l'ensemble $G = \{M_{x,y,z} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.
(2) On considère l'ensemble $H = \{M_{0,0,z} \,|\, z \in \mathbb{R}\}$, montrer que H est un sous-groupe de G.
(3) Montrer que H est distingué dans G.
(4) Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{R}$.
(5) Montrer que $G/_H$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.
(6) On rappelle que la notation $[g, h]$ désigne l'élément $ghg^{-1}g^{-1}$. Soient $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$, montrer que $[M_{x,y,z}, M_{x',y',z'}] = M_{0,0,xy'-x'y}$
(7) Soit D le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $X = \{[g, h] \,|\, g, h \in G\}$. Montrer que $D = H$.
(8) On note Z le centre de G. Montrer que $Z = H$. On pourra calculer $[g, M_{1,0,0}]$ pour tout $g \in G$.

Exercice 3

Soit G un groupe d'ordre 45.

(1) Montrer que G possède un unique 5-Sylow.
(2) Est-ce que G possède un unique 3-Sylow ?
(3) Montrer que G est abélien.
(4) Faites la liste des groupes d'ordre 45 à isomorphisme près.