UNIVERSITÉ DE RENNES 1

AR 4
Examen Terminal

Mercredi 14 Décembre, 14H-16H.
Durée : 2H.
Calculatrices non autorisées. Documents interdits. Les téléphones portables doivent être rangés, éteints. Veuillez ne pas sortir avant la fin de la première heure.
Les 4 exercices de cet examen sont indépendants.

Exercice 1

1. Montrer qu'un groupe d'ordre un nombre premier p est isomorphe à $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$, on explicitera très soigneusement un isomorphisme.
2. Décrire les orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$.
3. Donner la définition du centre d'un groupe.
4. Montrer que si un groupe d'ordre 33 agit sur un ensemble de cardinal 19 alors il existe un point fixe.

Exercice 2

Soient $a, b, c, d, u, v \in \mathbb{R}$, on pose $M_{a,b,c,d,u,v} = \begin{pmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $G = \{M_{a,b,c,d,u,v} \mid a, b, c, d, u, v \in \mathbb{R} \text{ et } ad - bc \neq 0\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. On justifiera soigneusement sa réponse.
2. Soit $z \in \mathbb{R}$. On note $H_z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que H_z est préservée par G. (On rappelle qu'une partie E est préservée par G lorsque $\forall x \in E$, $\forall g \in G$, $g \cdot x \in E$.)
3. Montrer que l'action de G sur H_z est transitive, si $z \neq 0$.
4. Décrire les orbites de l'action de G sur $\mathbb{R}^3$.
5. Supposons $z \neq 0$, montrer que l'action de G sur H_z est 2-transitive.
6. Supposons $z \neq 0$, montrer que l'action de G sur H_z n'est pas 3-transitive.

Exercice 3
Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. On suppose que l'action de G sur X est 2-transitive.

1. Soit $x_0 \in X$. Montrer que l'action du stabilisateur de x_0 sur $X \setminus \{x_0\}$ est transitive.

2. Soit H un sous-groupe distingué de G. Rappeler la définition de "sous-groupe distingué".

3. Montrer que l'action de H sur X est transitive ou bien triviale (i.e H fixe tous les points de X).

Exercice 4
Soit $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$.

1. Calculer explicitement le groupe dérivé $D(G)$ de G.

2. En déduire que le quotient $G/_{D(G)}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.