AR 4
Examen terminal durée 2h
Mercredi 19 décembre: 8h - 10h

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les exercices proposés sont indépendants.

Question de cours

(1) Est-ce que le groupe additif $(\mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}}, +)$ possède des éléments d'ordre $2, 3, 4, 6, 7, 10$? Donner un exemple de tels éléments lorsque c'est possible.
(2) Montrer soigneusement que tout groupe d'ordre 11 est isomorphe à $\mathbb{Z}/_{11\mathbb{Z}}$.
(3) Donner la décomposition canonique des groupe $\mathbb{Z}/_{21\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{15\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{30\mathbb{Z}}$.
(4) Décrire les orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$. Justifier.
(5) Décrire les orbites de l'action de $U = \{u \in \mathbb{C} \text{ tel que } |u| = 1\}$ sur $\mathbb{C}$. Justifier.
(6) Donner deux exemples de couples (G, H) tel que G et H ont le même ordre mais ne sont pas isomorphes.
(7) Montrer que tout groupe 50 n'est pas simple.
(8) Que signifie la phrase "G est groupe simple" ?

Exercice 1

(1) Rappeler l'ordre de $\mathfrak{A}_n$. $(n!/2)$
(2) On considère les deux permutations suivantes:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Décomposer σ et τ en produit de cycles à supports disjoints. $(\sigma = (1\,7\,9\,8)(3\,6\,4\,5)$ *et* $\tau = (1\,3\,2\,7\,8)(4\,5\,6))$
(3) En déduire l'ordre de σ et l'ordre de τ. (σ *est d'ordre* 4 *et* τ *est d'ordre* 15.)

(4) On note G le groupe engendré par σ et τ. Montrez que l'action G sur $\{1, ..., 7\}$ est transitive. ($\tau^2(1) = 2$, $\tau(1) = 3$, $\sigma^2\tau(1) = 4$, $\sigma^3\tau(1) = 5$, $\sigma\tau(1) = 6$, $\sigma(1) = 7$, $\sigma^3(1) = 8$, $\sigma^2(1) = 9$, *donc* $G \cdot 1 = \{1, ..., 9\}$)

(5) En déduire que le cardinal de G est divisible par $4, 15$ et 9. *Le théorème de Lagrange montre que l'ordre de σ et l'ordre de τ divise l'ordre de G, donc 4 et 15 divise l'ordre de G. La formule des classes montrent que le cardinal de toutes orbites divisent l'ordre du groupe donc 9 divise l'ordre de G.*

(6) En déduire que le cardinal de G est divisible par 180.*Le ppcm de 4, 15 et 9 est 180.*

(7) Est-ce que l'action de G sur $\{1, ..., 9\}$ est fidèle ? *Oui, car G est un sous-groupe du groupe symétrique. L'action sur $\{1, ..., 9\}$ est donnée par l'injection canonique.*

(8) Est-elle libre ? *Non, car σ stabilise le point 2.*

(9) Est-ce que G est inclus dans $\mathfrak{A}_9$? *Oui, car σ et τ sont de signature paire, donc incluse dans $\mathfrak{A}_9$.*

Exercice 2

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on pose $M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que l'ensemble $G = \{M_{x,y,z} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. ...

(2) On considère l'ensemble $H = \{M_{0,0,z} \,|\, z \in \mathbb{R}\}$, montrer que H est un sous-groupe de G. ...

(3) Montrer que H est distingué dans G.
L'application $G \to \mathbb{R}^2$ donné par $M_{x,y,z} \mapsto (x, y)$ est un morphisme de groupe (surjectif) de noyau H, donc H est distingué. Un calcul direct donne le même résultat.

(4) Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{R}$.
L'application $H \to \mathbb{R}$ donné par $M_{0,0,z} \mapsto z$ est un isomorphisme de groupe (surjectif) de noyau H.

(5) Montrer que $G/_H$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.
L'application $G \to \mathbb{R}^2$ donné par $M_{x,y,z} \mapsto (x, y)$ est un morphisme de groupe surjectif de noyau H, donc $G/_H$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$ par le premier théorème d'isomorphisme.

(6) On rappelle que la notation $[g, h]$ désigne l'élément $ghg^{-1}g^{-1}$.
Soient $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$, montrer que $[M_{x,y,z}, M_{x',y',z'}] = M_{0,0,xy'-x'y}$.
...

(7) Soit D le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $X = \{[g,h] \mid g,h \in G\}$. Montrer que $D = H$.
L'inclusion $D \subset H$ est donné par la question précédente. L'inclusion $H \subset D$ est donné par exemple, par le calcul de $[M_{x,0,0}, M_{0,1,0}] = M_{0,0,x}$.

(8) On note Z le centre de G. Montrer que $Z = H$. On pourra calculer $[g, M_{1,0,0}]$ pour tout $g \in G$.
Mq $Z \subset H$. Soit $M_{x,y,z} \in Z$; $[M_{x,y,z}, M_{1,0,0}] = M_{0,0,-y} = M_{0,0,0}$, la première égalité est donnée par la question 6), la seconde vient du fait que $M_{x,y,z} \in Z$, on doit donc avoir $y = 0$, de même le calcul de $[M_{x,y,z}, M_{0,1,0}]$ donne $x = 0$ et donc $Z \subset H$. L'autre inclusion est plus facile, il suffit de calculer explicitement $[M_{x,y,z}, M_{0,0,z'}]$ pour tout x,y,z,z', la question 6) montre que $[M_{x,y,z}, M_{0,0,z'}] = M_{0,0,0} = Id$. cqfd.

Exercice 3

Soit G un groupe d'ordre 45 $(= 3^2 \cdot 5)$.

(1) Montrer que G possède un unique 5-Sylow.
On note k_p le nombre de p-Sylow de G. Les théorèmes de Sylow montre que $k_5 = 1,3,9$ et $k_5 \equiv 1\,[5]$, autrement dit $k_5 = 1,3,9$ et $k_5 = 1,6,11,\ldots$; donc $k_5 = 1$.

(2) Est-ce que G possède un unique 3-Sylow ?
Les théorèmes de Sylow montre que $k_3 = 1,5$ et $k_3 \equiv 1\,[3]$, autrement dit $k_3 = 1,5$ et $k_3 = 1,4,7,\ldots$; donc $k_3 = 1$.. La réponse est donc oui.

(3) Montrer que G est abélien.
Soient S_3 et S_5 l'unique 3-Sylow de G et l'unique 5-Sylow de G. S_3 et S_5 sont distingués car ils sont les uniques 3-Sylow et 5-Sylow, de plus $S_3 \cap S_5 = \{1\}$, car tout élément de l'intersection est d'ordre un diviseur de 3^2 et de 5, donc de 1, enfin $S_3S_5 = G$ car le groupe engendré par S_3 et S_5 a un ordre divisible par 45. Bilan, G est le produit direct interne de S_3 et S_5. Comme S_3 est d'ordre 3^2, on sait que S_3 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}})^2$ ou $\mathbb{Z}/_{9\mathbb{Z}}$ et comme S_5 est d'ordre 5, on sait que S_5 est isomorphe à $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$. Donc G est abélien.

(4) Faites la liste des groupes d'ordre 45 à isomorphisme près.
On a montré que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}})^2 \times \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/_{15\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ ou $\mathbb{Z}/_{9\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/_{45\mathbb{Z}}$.