AR 4
TD 4

Exercice 1
Calculer l'exposant de chacun des groupes suivants puis donner leur décomposition en produit direct de p-groupes:

$$\mathbb{Z}_{/20Z} \times \mathbb{Z}_{/15Z} \qquad \mathbb{Z}_{/10Z} \times \mathbb{Z}_{/11Z} \qquad \mathbb{Z}_{/20Z} \times \mathbb{Z}_{/30Z} \times \mathbb{Z}_{/40Z}$$
$$\mathbb{Z}_{/20Z} \times \mathbb{Z}_{/45Z} \qquad \mathbb{Z}_{/10Z} \times \mathbb{Z}_{/22Z} \qquad \mathbb{Z}_{/20Z} \times \mathbb{Z}_{/45Z} \times \mathbb{Z}_{/50Z}$$

Exercice 2
Soient $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| b \in \mathbb{R},\, a \neq 0 \right\}$ et $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que N est un sous-groupe distingué de G isomorphe à $\mathbb{R}$.
3. Montrer que G/N est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct entre $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 3
Soient p un nombre premier impair. Soit G un groupe à $2p$ éléments.

1. Montrer que G possède un élément r d'ordre p et un élément s d'ordre 2.
2. Montrer que $G =< r, s >$ et que $< r >$ est distingué dans G.
3. Montrer que le groupe $Aut(< r >)$ des automorphismes de $< r >$ est un groupe cyclique d'ordre $p-1$. En déduire que $Aut(< r >)$ contient un unique élément d'ordre 2.
4. En déduire que $srs^{-1} = r$ ou $srs^{-1} = r^{-1}$ puis que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou à D_p.
5. En déduire que $\mathfrak{S}_3$ est isomorphe à D_3.
6. En déduire la classification des groupes d'ordre $6, 10, 14, 22, \dots$.

Exercice 4
On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle d.

1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Is} = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,|\, f \text{ est linéaire et } d(f(x), f(y)) = d(x, y)\}$ est un groupe pour la composition des applications.
2. Rappeler les définitions de rotation, réflexion, symétrie centrale.

Exercice 5
Soit $\mathcal{P}_n$ un polygone régulier à n côtés. On considère G l'ensemble des éléments de Is définit par $G = \{f \in \mathrm{Is} \,|\, f(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_n\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de Is.
2. Montrer que G est isomorphe à D_n.

Exercice 6
Donner la décomposition canonique des groupes abéliens suivants:

$$\mathbb{Z}_{/20Z} \times \mathbb{Z}_{/15Z} \qquad \mathbb{Z}_{/10Z} \times \mathbb{Z}_{/11Z} \qquad \mathbb{Z}_{/20Z} \times \mathbb{Z}_{/30Z} \times \mathbb{Z}_{/40Z}$$
$$\mathbb{Z}_{/20Z} \times \mathbb{Z}_{/45Z} \qquad \mathbb{Z}_{/10Z} \times \mathbb{Z}_{/22Z} \qquad \mathbb{Z}_{/20Z} \times \mathbb{Z}_{/45Z} \times \mathbb{Z}_{/50Z}$$

Exercice 7
Soit n un entier, on note $\mathcal{N}_n$ le nombre de groupes abéliens d'ordre n.

1. Soit p un nombre premier. Calculer $\mathcal{N}_{p^2}$, $\mathcal{N}_{p^3}$ et $\mathcal{N}_{p^4}$.
2. Soit α un entier, relier $\mathcal{N}_{p^\alpha}$ et le nombre de façons d'écrire un entier comme somme d'entiers plus petit.
3. Soient n et m deux entiers premier entre eux, montrer que $\mathcal{N}_{mn} = \mathcal{N}_m\mathcal{N}_n$.
4. En déduire, $\mathcal{N}_n$ pour un entier quelconque n.

Exercice 8

1. Lister les groupes abéliens d'ordre 8.
2. Soit G un groupe non abélien d'ordre 8. Montrer que G possède un élément a d'ordre 4 et aucun élément d'ordre 8.
3. Montrer que $< a >$ est distingué dans G.
4. Soit $b \notin < a >$, montrer que si l'ordre de b est 2 alors $bab^{-1} = a^{-1}$.
5. En déduire que ou bien G est isomorphe à D_4 ou bien tous les éléments de $G \setminus < a >$ sont d'ordre 4.
6. En supposant que G vérifie la seconde hypothèse, montrer que G possède 6 éléments d'ordre 4 et un élément d'ordre 2.
7. En déduire que G est isomorphe au groupe $\mathbb{H} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k$.