TD 3 AR4

Exercice 1
Pour chacune des relations binaires suivantes, déterminez si ce sont des relations d'équivalence, et dans ce cas les ensembles quotients:
a) Sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$,
b) Sur $\mathbb{R}^*$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$,
c) Sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$,
d) Sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$,
e) Sur $\mathbb{Z}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$,
f) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \ln(x/y) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2
Soient E, F deux ensembles, f une application de E dans F, et $\mathcal{R}'$ une relation d'équivalence sur F. On définit la relation sur E

$$x\mathcal{R}y \,\text{ssi}\, f(x)\mathcal{R}'f(y).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Montrer que pour toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E, il existe un ensemble F et une application $f : E \to F$ telle que $\mathcal{R}$ puisse se définir comme ci-dessus avec $\mathcal{R}'$ la relation d'égalité.

Exercice 3 Soit G un groupe et N un sous-groupe distingué de G d'indice fini n. Montrer que pour tout g dans G, $g^n \in N$.

Exercice 4
Soit G un groupe d'ordre fini n.

1. Montrer que $\forall g \in G,\ g^n = e$.
2. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.
3. Si G est cyclique, montrer que pour tout diviseur d de n, il existe un sous-groupe de G d'indice d.

Exercice 5
On considère le sous-groupe $H =< xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G >$ d'un groupe G.

1. Montrer que H est distingué dans G.
2. Montrer que le quotient G/H est abélien.

Exercice 6
Montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 H d'un groupe G est distingué.

Exercice 7
On appelle $Aut(G)$ le groupe (avec pour loi la composition) des automorphismes de G.

1. Montrer que
$$\begin{aligned} \varphi :\ & G \to Aut(G) \\ & g \mapsto (h \mapsto ghg^{-1}) \end{aligned}$$
est un morphisme de groupes.
2. On note $Int(G) := Im(\varphi)$. Montrer que $Int(G)$ est un sous-groupe distingué de $Aut(G)$ (sous-groupe des automorphismes intérieurs).