Exercice 1 La table de composition d'un groupe est un tableau à double entrée ou l'on place sur la ligne du dessus et la colonne de gauche, les éléments du groupe. Enfin, on complète les cases en plaçant dans la case de coordonnées (x, y) le produit xy. Par exemple, voici la table de composition de $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$:

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

1. Soit G un groupe d'ordre 2. On appelle ces éléments e et x, montrez qu'il n'y a pas de choix pour construire la table de composition. En déduire que tout groupe d'ordre 2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

2. Soit G un groupe d'ordre 3. On appelle ces éléments e, x et y, montrez qu'il n'y a pas de choix pour construire la table de composition. En déduire que tout groupe d'ordre 3 est isomorphe à $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$.

3. Soit G un groupe d'ordre 4. On appelle ces éléments e, x et y,cette fois-ci, il y a $3 = 2 + 1$ choix pour construire la table de composition. En déduire que tout groupe d'ordre 4 est isomorphe à $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$ ou $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

Exercice 2
Montrer que l'application $\alpha(i) = 10 - i$ défini une permutation de $\{1, \cdots, 9\}$. Décomposer ensuite α en produit de cycles disjoints.

Exercice 3
Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 11 & 7 & 3 & 2 & 6 & 12 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{12}$. Calculer σ^{2000}.

Exercice 4
Déterminer $X_n = \{\omega(\sigma) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$, pour $n = 1, \cdots, 7$.

Exercice 5
Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{10}$, on a $\omega(\sigma) \leqslant 30$.

Exercice 6
Soit $(i_1\, i_2\, \cdots\, i_k)$ un cycle de longueur k de $\mathfrak{S}_n$. Considérons $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que $\sigma(i_1\, i_2\, \cdots\, i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\, \sigma(i_2)\, \cdots\, \sigma(i_k))$.

Exercice 7
Donner un exemple de permutations α, β, γ de $\mathfrak{S}_5$ tels que α et β commutent, β et γ commutent, et enfin γ et α ne commutent pas.

Exercice 8
Le but de l'exercice est de montrer que, pour $n \geqslant 3$, le centre du groupe $\mathfrak{S}_n$ est réduit à l'identité. Le centre d'un groupe G, est le sous-groupe $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$.

1. Montrer que le centre d'un groupe est bien un sous-groupe.

2. Soit $i \in \{1, ..., n\}$, donner un exemple de permutation σ telle que $\sigma(i) = i$ et $\forall j \in \{1...n\}$, $j \neq i \Longrightarrow \sigma(j) \neq j$.

3. Soit $s \in Z(\mathfrak{S}_n)$ montrer que $s(i) = i$.

4. Conclure.

Exercice 9 Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les familles suivantes:

1. Les transpositions.
2. $\{(1\,2), (1\,3), \cdots, (1\,n)\}$.
3. $\{(1\,2), (2\,3), \cdots, (n\,n-1)\}$.
4. $\{(1\,2), (2\,3 \cdots n)\}$.
5. $\{(1\,2), (1\,2\,3), \cdots, (1\,2 \cdots n)\}$.

Exercice 10

1. Montrer que les puissances d'un cycle ne sont pas nécessairement des cycles.
2. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est dite *régulière* lorsqu'elle n'a pas de points de fixes et qu'elle est le produit de cycles disjoints de même longueur. Montrer que toute permutation régulière est une puissance d'un $n-$cycle.
3. Soient σ un $n-$cycle et $k \in \mathbb{N}$, montrer que σ^k est une permutation régulière et qu'elle est le produit de $n \vee k$ cycles de longueur $\frac{n}{n \vee k}$.
4. En déduire que si p est un nombre premier alors toute puissance d'un $p-$cycle est un $p-$cycle ou l'identité.