TD 1 AR4

Exercice 1
Pour chacun des couples d'un ensemble et d'une loi de composition interne suivants, décider s'il est un groupe, et, dans le cas où il en est un, trouver l'élément neutre, et, pour tout élément, son inverse.

1. $(\mathbb{N}, +)$
2. $(M_n(\mathbb{R}), +)$
3. $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$
4. $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$
5. $(\{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot)$
6. $(\{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = \pm 1\}, \cdot)$
7. $(\mathbb{R}, *)$ où $x * y = x + y - 1$

Exercice 2
Soit G un groupe. Montrer que l'égalité $a * b = a * c$ entraine $b = c$. De même, pour l'égalité $b * a = c * a$.

Exercice 3
Soit G un groupe. Montrer que si pour tout $x \in G$, $x^2 = e$ alors G est abélien.

Exercice 4

1. Donner un exemple d'un groupe G et de deux sous-groupes H_1 et H_2, tels que $H_1 \cup H_2$ n'est pas un sous-groupe.
2. Soient G un groupe, H_1 et H_2 deux sous-groupes. Montrer que $H_1 \cup H_2$ est un groupe si et seulement si $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

Exercice 5

1. Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer que G contient un élément d'ordre 2. (Indication: considérer l'application $\varphi : G \to G : x \mapsto x^{-1}$.)
2. Soit G un groupe fini qui possède un élément d'ordre 2. Montrer que G est d'ordre pair. (Indication: considérer l'application $t_x : G \to G : y \mapsto xy$.)

Exercice 6
Un sous-ensemble H non vide d'un groupe stable pour la loi de composition est-il un sous-groupe ? Si l'ensemble H est fini ?

Exercice 7
Pour chacune des applications f suivantes, déterminer si elles sont ou non des morphismes. Lorsque f est un morphisme, déterminer si elle est injective, surjective ou bijective.

1. $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), a \mapsto a + {}^t a$.
2. $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), a \mapsto ba$ où b est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ fixé.
3. $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), a \mapsto {}^t a$.
4. $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), a \mapsto a^{-1}$.
5. $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), a \mapsto {}^t a a$.
6. $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), a \mapsto {}^t a^{-1}$.
7. $f : M_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), a \mapsto \exp(a)$.
8. $f : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R}), t \mapsto \exp(ta)$ où a est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ fixé.
9. $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*, z \mapsto \mid z \mid$.

Exercice 8 Soient G un groupe, $g, h \in G$.

1. Montrer que $g^m = e \Rightarrow \omega(g) \,|\, m$.
2. Montrer que $\omega(g) = \omega(hgh^{-1}) = \omega(g^{-1})$ (fini ou non).
3. Montrer que $\omega(gh) = \omega(hg)$.
4. Supposons que $\omega(g)$ et $\omega(h)$ sont finis, premiers entre eux et que $gh = hg$. Montrer que $\omega(gh) = \omega(g)\omega(h)$.
5. Soient $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes et $x \in G_1$. Montrer que l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x.