UNIVERSITÉ DE RENNES 1

AR 4

Devoir Maison 3

Exercice 1

Soit G le sous-groupe de $\mathfrak{S}_7$ engendré par $\alpha = (2\,4\,6)(5\,7\,1)$ et $\beta = (3\,4)(5\,6)$. Nous allons calculer l'ordre de G.
On note G_1 le stabilisateur du point 1 dans G, on note $G_{1,2}$ le stabilisateur des points 1 et 2 dans G, enfin on note $G_{1,2,3}$ le stabilisateur des points 1, 2 et 3 dans G. On note X_1 l'orbite de 1 sous G, X_2 l'orbite de 2 sous G_1 et X_3 l'orbite de 3 sous $G_{1,2}$. On rappelle que $\sharp E$ désigne le cardinal de l'ensemble E.

1. Montrer que 6 divise l'ordre de G.
2. Montrer que $\sharp G = \sharp X_1 \cdot \sharp X_2 \cdot \sharp X_3 \cdot \sharp G_{1,2,3}$.
3. Montrer que G agit transitivement sur $\{1, ..., 7\}$. En déduire $\sharp X_1$.
4. Calculer $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$ et $\delta = \gamma\beta\gamma^{-1}$.
5. Montrer que $\{3, 4, 5, 6\} \subset X_3$.
6. Montrer que $7 \in X_2$, en déduire que $X_2 = \{2, 7\}$ ou $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
7. On fait agir G sur l'ensemble des parties à 3 éléments de $\{1, ..., 7\}$ par si $E \subset \{1, ..., 7\}$ alors $g \cdot E = g(E)$. Montrer que l'orbite de l'ensemble $\{1, 2, 7\}$ est de cardinal 7. Une fois que l'on a trouvé les 7 parties, un graphe avec pour sommet les 7 parties et des flèches étiquetées α ou β peut aider à conclure...
8. En déduire que 7 est un point fixe de $G_{1,2}$.
9. En déduire que 6 et 5 sont des points fixes de $G_{1,2,3}$.
10. Conclure que $\sharp X_3 = 4$. En déduire que $\sharp G = 168$

Exercice 2

Application direct du cours. Soit G agissant sur un ensemble X.

1. Montrer qu'une action est transitive si et seulement si l'espace $X/_G$ est de cardinal 1 si et seulement si il n'y a qu'une seule orbite.
2. Montrer que le noyau de l'action est égale à l'intersection des stabilisateurs. Comment appelle-t-on une action dont le noyau est trivial ?

3. Récrire la définition d'une action libre à l'aide des stabilisateurs.
4. Montrer qu'une action qui possède un point fixe n'est pas transitive sauf si $\sharp X = *$, trouver la ou les valeurs de $*$.
5. Montrer que si deux points sont dans la même orbite alors leurs stabilisateurs sont conjuguées.
6. Donner un exemple d'action simplement transitive. Donner un exemple "le plus" général possible.
7. Si G agit sur G par conjugaison, comment appelle-t-on les stabilisateurs d'un élément, les orbites d'un élément, le noyau de l'action ?

[1] [2]

[1] Pour ceux qui coince à la question 7, on doit trouver $= \{1,2,7\},\{5,4,1\},\{7,6,5\},\{6,3,1\},\{2,3,5\},\{4,3,7\},\{2,4,6\}$.

[2] Pour ceux qui coince à la question 10, penser à utiliser la question 1.