UNIVERSITÉ DE RENNES 1

AR 4

DM 2

Exercice 1

1. Quel est le cardinal du groupe multiplicatif $G = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$?
2. Quels sont les ordres respectifs de 2 et 14 dans G ?
3. Soit G' un groupe cyclique de cardinal $2k$, $k \geqslant 1$ un entier. Combien G' possède-t-il d'éléments d'ordre 2 ?
4. Le groupe G est-il cyclique ? Justifier.

Exercice 2

1. Rappeler le cardinal de $\mathfrak{S}_n$.
2. On considère les deux permutations suivantes:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Décomposer σ et τ en produit de cycles à supports disjoints.

3. En déduire l'ordre de σ et l'ordre de τ.
4. On note G le groupe engendré par σ et τ. Montrer que l'action G sur $\{1, ..., 7\}$ est transitive.
5. En déduire que le cardinal de G est divisible par $4, 5$ et 7.
6. En déduire que le cardinal de G est divisible par 140.

Exercice 3 Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on pose $M_{\alpha,\beta,a} = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'ensemble $G = \{M_{\alpha,\beta,a} \mid \alpha, \beta, \in \mathbb{R}^*,\ a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'action de G sur $\mathbb{R}^2$ possède un point fixe.
3. Montrer que ce point fixe est unique.
4. Montrer que la droite D engendré par $(1, 0)$ est *préservé* par G, c'est à dire que si $x \in D$ alors $\forall g \in G,\ g(x) \in D$.
5. Montrer que G agit transitivement sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$.
6. Décrire les orbites de l'action de G sur D.
7. Décrire les orbites de l'action de G sur $\mathbb{R}^2$.
8. Montrer que le stabilisateur d'un point de $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.