UNIVERSITÉ DE RENNES 1

AR 4
Devoir Maison 2

Exercice 1
On note $Im(z)$ la partie imaginaire d'un nombre complexe z. On note $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$, on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $\mathcal{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 0\}$

1. Soient $z \in \mathcal{H}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$. Montrez que
$$Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} Im(z).$$
2. On pose pour M dans $SL(2, \mathbb{R})$ et $z \in \mathcal{H}$,
$$M \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$
Montrez que la quantité $M \cdot z$ est toujours bien défini, appartient à $\mathcal{H}$, et que l'application $(M, z) \mapsto M \cdot z$ est une action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$.
3. Montrez que cette action n'est pas fidèle. Décrivez le noyau de cette action.
4. Montrez que cette action est transitive.
5. Montrez que si l'on pose $\frac{az+b}{cz+d} = \infty$ lorsque $z = -\frac{d}{c}$ et $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \frac{a}{c}$ alors on définit une action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
6. Montrez que cette action n'est pas fidèle. Décrivez le noyau de cette action.
7. Montrez que cette action est transitive.
8. Montrez que cette action est doublement transitive.
9. Déduire de tout ceci, les orbites de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Exercice 2
Soit N et H deux groupes. On note $G = N \times H$. C'est un groupe pour la loi $(n, h) \times (n', h') = (nn', hh')$. Nous allons définir une autre loi de groupe sur l'ensemble $G = N \times H$, de la façon suivante. Soit φ un morphisme de $H \to Aut(N)$.

1. On pose $(n,h) *_\varphi (n',h') = (n\varphi(h)(n'), hh')$. Montrer que $(N \times H, *_\varphi)$ est un groupe. On explicitera clairement son élément neutre et l'inverse de (n,h). On note ce groupe $N \rtimes_\varphi H$ pour éviter les confusions.

2. Remarquer que les applications canoniques de H (resp. de N) dans $N \rtimes_\varphi H$ sont injectives. On identifie donc le couple (n, e_H) avec n et le couple (e_N, h) avec h.

3. Montrer que via cet identification que $h *_\varphi n *_\varphi h^{-1} = \varphi(h)(n)$. En déduire que N est un sous-groupe distingué de $N \rtimes_\varphi H$.

4. Déduire de tout ceci, l'existence deux morphismes: $i : N \to G$, $p : G \to H$ tel que:

    - i est injective et p est surjective.
    - Le noyau de p est N.
    - La restriction de p à H est un isomorphisme.

5. Montrer H est distingué dans $N \rtimes_\varphi H$ si et seulement si $\forall h \in H$, $\varphi(h) = Id_N$.

6. Montrer que si $\exists h \in H$, $\varphi(h) \neq Id_N$ alors il existe un $n \in N$ et $h \in H$ tel que $n *_\varphi h \neq h *_\varphi n$.

Exercice 3
Soit G un groupe tel qu'il existe deux sous-groupes N et H vérifiant:

- $N \lhd G$ et,
- si on note p la surjection canonique de G sur $G_{/N}$ alors p restreint à H est un isomorphisme.

1. Montrer que pour tout $h \in H$, l'application $N \to G$ qui a $n \mapsto hnh^{-1}$ définit un automorphisme $\varphi(h)$ de N et aussi l'existence d'un morphisme $\varphi : H \to Aut(N)$.

2. Montrer que $N \cap H = \{e\}$.

3. Montrer que l'ensemble $NH = \{nh \mid n \in N,\ h \in H\}$ est en fait le groupe G.

4. Montrer que si $nh = n'h'$ avec $n, n' \in N$ et $h, h' \in H$ alors $n = n'$ et $h = h'$.

5. On a donc défini une bijection $G \to N \times H$. Montrer que cette bijection est un isomorphisme entre G et $N \rtimes_\varphi H$.

6. En déduire que $N \rtimes_\varphi H$ est isomorphe à $N \times H$ si et seulement si $\forall h \in H$, $\varphi(h) = Id_N$, en utilisant la fin de l'exo 2.

    On remarquera que l'exos 2 et 3 fournissent la même construction mais dans deux sens différents. Cette construction s'appelle le *produit semi-direct* de N et H.