AR 4
Devoir Maison 1

Exercice 1

Si G est un groupe et H un sous-groupe (pas forcément distingué) de G, on dit qu'un sous-groupe K de G est un complément de H (dans G) si $H \cap K = 1$ et $HK = G$ (d'où $KH = G$).

Soient p un nombre premier et G un groupe cyclique d'ordre N.

1. Montrer qu'il existe un sous-groupe H d'ordre d de G si et seulement si d divise N.
2. Montrer quel tel sous-groupe est unique.
3. Montrer que si $n = p^2$ avec p nombre premier alors le sous-groupe H d'ordre p est un sous-groupe distingué de G qui n'a pas de complément dans G.
4. Plus généralement montrer que H admet un complément dans G si et seulement si $\sharp H$ est premier avec $\frac{\sharp G}{\sharp H}$.

Exercice 2
Soit $n \geq 2$, et $\rho : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ un morphisme de groupes non trivial (c'est-à-dire non identiquement égal à 1).

1. Montrer qu'il existe une transposition τ_0 telle que $\rho(\tau_0) = -1$.
2. En déduire que pour toute transposition τ, $\rho(\tau) = -1$.
3. Donner $\rho(\omega)$ pour ω un cycle de longueur p.
4. Conclure qu'il n'y a au plus qu'un seul morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$.

   On pose, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

5. Montrer que ϵ est le seul morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle $\epsilon(\sigma)$ la signature de σ.

Exercice 3
Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit la matrice P_σ de taille $n \times n$ par
$$(P_\sigma)_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)} \text{ pour tous } i, j \in \{1, n\}.$$

1. Montrer que pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, on a $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}$.
2. En déduire que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\det(P_\sigma) = \epsilon(\sigma)$ où ϵ est la signature vue à l'exercice précédent.