AR 4
Devoir Maison 1

Exercice 1
Soit $n \geq 2$, et $\rho : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ un morphisme de groupes non trivial (c'est-à-dire non identiquement égal à 1).

1. Montrer qu'il existe une transposition τ_0 telle que $\rho(\tau_0) = -1$.
2. En déduire que pour toute transposition τ, $\rho(\tau) = -1$.
3. Donner $\rho(\omega)$ pour ω un cycle de longueur p.
4. Conclure qu'il n'y a au plus qu'un seul morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$.

   On pose, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

5. Montrer que ϵ est le seul morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle $\epsilon(\sigma)$ la signature de σ.

Exercice 2
Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit la matrice P_σ de taille $n \times n$ par
$$(P_\sigma)_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)} \text{ pour tous } i, j \in \{1, n\}.$$

1. Montrer que pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, on a $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}$.
2. En déduire que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\det(P_\sigma) = \epsilon(\sigma)$ où ϵ est la signature vue à l'exercice précédent.

Exercice 3
1. On considère les deux permutations suivantes:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Décomposez σ et τ en produit de cycles à supports disjoints. En déduire l'ordre de σ et l'ordre de τ.
2. On note G le groupe engendré par σ et τ. Montrez que l'action G sur $\{1, ..., 7\}$ est transitive.
3. En déduire que le cardinal de G est divisible par $4, 5$ et 7.
4. En déduire que le cardinal de G est divisible par 140.