AR 4
Contrôle continu durée 1h

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Question de cours 1

(1) Rappelez la définition du groupe dérivé d'un groupe G. Expliciter le groupe dérivé de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ (On pourra utiliser un résultat du cours).
(2) On considère l'action du groupe $U = \{u \in \mathbb{C} \,|\, |u| = 1\}$ sur $\mathbb{C}$ par $u \cdot z = uz$. Décrivez les orbites de cette action.

Exercice 2

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X.

(1) Rappelez la définition d'une action simplement transitive.
(2) Montrer que si G agit simplement transitivement alors il agit fidèlement et transitivement sur X.
(3) Soient $g, h \in G$ tel que $gh = hg$ et x un point fixé par g. Montrer que $h(x)$ est un point fixe de g.
(4) On suppose à présent G abélien. Montrer que si l'action de G sur X est fidèle et transitive alors cette action est simplement transitive.

Exercice 3

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on pose $M_{\alpha,\beta,a} = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que l'ensemble $G = \{M_{\alpha,\beta,a} \mid \alpha, \beta, \in \mathbb{R}^*,\ a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que l'action de G sur $\mathbb{R}^2$ possède un point fixe.
(3) Montrer que ce point fixe est unique.
(4) Montrer que la droite D engendré par $(1, 0)$ est *préservé* par G, c'est à dire que si $x \in D$ alors $\forall g \in G$, $g(x) \in D$.
(5) Montrer que G agit transitivement sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$.
(6) Décrivez les orbites de l'action de G sur D.
(7) Décrivez les orbites de l'action de G sur $\mathbb{R}^2$.
(8) Montrer que le stabilisateur d'un point de $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.