AR 4

Contrôle continu durée 1h

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Question de cours 1

(1) Énoncer le théorème de Lagrange.
(2) Soit p un nombre premier. À l'aide du théorème de Lagrange, montrer que tout groupe d'ordre p est isomorphe à $\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$.

Exercice 2

On considère les deux permutations suivantes:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 3 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Décomposez σ et τ en produit de cycles à supports disjoints.
(2) En déduire l'ordre de σ et l'ordre de τ.
(3) On note G le groupe engendré par σ et τ. Montrer que l'ordre de G est divisible par 60.
(4) Pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10$, donner de façon explicite un élément de G d'ordre n.
(5) Soit $g \in G$, soit p un nombre premier divisant l'ordre de g, montrer que $p = 2, 3, 5$ ou 7.
(6) Montrer que tout élément de G est d'ordre inférieur à 20.

Exercice 3

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on pose $M_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Soient $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$. Calculer $M_{x,y,z} M_{x',y',z'}$.
(2) Calculer $M_{x,y,z}^{-1}$.
(3) Montrer que $G = \{M_{x,y,z} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

(4) Montrer que $H = \{M_{0,0,z} \mid z \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de G.
(5) Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.
(6) Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{R}$.
(7) Montrer que le quotient $G_{/H}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.