Sur la définissabilité dans les anneaux

Laurent Moret-Bailly

IRMAR, Université de Rennes 1
Membre du réseau européen *Arithmetic Algebraic Geometry*

SAGA, 3 juillet 2007

Summary

Ensembles existentiellement définissables :

Si R est un anneau et $n \in \mathbb{N}$, alors :

- les sous-ensembles *algébriques élémentaires* de R^n sont définis par des systèmes finis d'équations polynômes, à coefficients dans R:

$$\{t \in R^n \mid F_1(t) = \cdots = F_r(t) = 0\}$$

- les sous-ensembles *algébriques* de R^n sont les réunions finies d'ensembles algébriques élémentaires;
- les sous-ensembles *constructibles* sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles algébriques (élémentaires);
- les sous-ensembles *existentiels positifs* sont les projections de sous-ensembles algébriques d'un R^{n+p};
- les sous-ensembles *existentiels* sont les projections de sous-ensembles constructibles d'un R^{n+p}.

Ensembles existentiellement définissables :

Si R est un anneau et $n \in \mathbb{N}$, alors :

- les sous-ensembles *algébriques élémentaires* de R^n sont définis par des systèmes finis d'équations polynômes, à coefficients dans R:

$$\{t \in R^n \mid F_1(t) = \cdots = F_r(t) = 0\}$$

- les sous-ensembles *algébriques* de R^n sont les réunions finies d'ensembles algébriques élémentaires;
- les sous-ensembles *constructibles* sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles algébriques (élémentaires);
- les sous-ensembles *existentiels positifs* sont les projections de sous-ensembles algébriques d'un R^{n+p};
- les sous-ensembles *existentiels* sont les projections de sous-ensembles constructibles d'un R^{n+p}.

Ensembles existentiellement définissables :

Si R est un anneau et $n \in \mathbb{N}$, alors :

- les sous-ensembles *algébriques élémentaires* de R^n sont définis par des systèmes finis d'équations polynômes, à coefficients dans R:

$$\{t \in R^n \mid F_1(t) = \cdots = F_r(t) = 0\}$$

- les sous-ensembles *algébriques* de R^n sont les réunions finies d'ensembles algébriques élémentaires;
- les sous-ensembles *constructibles* sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles algébriques (élémentaires);
- les sous-ensembles *existentiels positifs* sont les projections de sous-ensembles algébriques d'un R^{n+p};
- les sous-ensembles *existentiels* sont les projections de sous-ensembles constructibles d'un R^{n+p}.

Ensembles existentiellement définissables :

Si R est un anneau et $n \in \mathbb{N}$, alors :

- les sous-ensembles *algébriques élémentaires* de R^n sont définis par des systèmes finis d'équations polynômes, à coefficients dans R:

$$\{t \in R^n \mid F_1(t) = \cdots = F_r(t) = 0\}$$

- les sous-ensembles *algébriques* de R^n sont les réunions finies d'ensembles algébriques élémentaires;
- les sous-ensembles *constructibles* sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles algébriques (élémentaires);
- les sous-ensembles *existentiels positifs* sont les projections de sous-ensembles algébriques d'un R^{n+p};
- les sous-ensembles *existentiels* sont les projections de sous-ensembles constructibles d'un R^{n+p}.

Ensembles existentiellement définissables :

Si R est un anneau et $n \in \mathbb{N}$, alors :

- les sous-ensembles *algébriques élémentaires* de R^n sont définis par des systèmes finis d'équations polynômes, à coefficients dans R:

$$\{t \in R^n \mid F_1(t) = \cdots = F_r(t) = 0\}$$

- les sous-ensembles *algébriques* de R^n sont les réunions finies d'ensembles algébriques élémentaires;
- les sous-ensembles *constructibles* sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles algébriques (élémentaires);
- les sous-ensembles *existentiels positifs* sont les projections de sous-ensembles algébriques d'un R^{n+p};
- les sous-ensembles *existentiels* sont les projections de sous-ensembles constructibles d'un R^{n+p}.

Remarques :

- on peut remplacer « projections » par « images par une application polynomiale »;
- si R est intègre, tout ensemble algébrique est élémentaire;

Remarques :

- on peut remplacer « projections » par « images par une application polynomiale »;
- si R est intègre, tout ensemble algébrique est élémentaire;

Remarques :

- on peut remplacer « projections » par « images par une application polynomiale »;
- si R est intègre, tout ensemble algébrique est élémentaire;
- un sous-ensemble existentiel positif de R est de la forme

$$\left\{ t \in R \;\middle|\; \exists \underline{x} \in R^n, \quad \bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{q} F_{i,j}(t, \underline{x}) = 0 \right\}$$

avec $F_{i,j} \in R[T, \underline{X}]$;

Remarques :

- on peut remplacer « projections » par « images par une application polynomiale »;
- si R est intègre, tout ensemble algébrique est élémentaire;
- un sous-ensemble existentiel de R est de la forme

$$\left\{ t \in R \;\middle|\; \exists \underline{x} \in R^n, \quad \bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{q} F_{i,j}(t, \underline{x}) \ \substack{= \\ \neq}\ 0 \right\}$$

avec $F_{i,j} \in R[T, \underline{X}]$.

Exemples :

$E \subset R$	E **existentiel positif dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$		
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		
$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$		
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	**E existentiel positif dans R ?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$		
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		
$\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$		
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **existentiel positif dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$		
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		
$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$		
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **existentiel positif dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		
$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$		
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **existentiel positif dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		
$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$		
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **existentiel positif dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		
$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$		
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **existentiel positif dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		
$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$		
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	**E existentiel positif dans R ?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	?	
$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$		
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	**E existentiel positif dans R ?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	?	(conjecture de Mazur $\Rightarrow$ non)
$\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$		
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **existentiel positif dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	?	(conjecture de Mazur $\Rightarrow$ non)
$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$		
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	**E existentiel positif dans R ?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	?	(conjecture de Mazur $\Rightarrow$ non)
$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$	oui	
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **existentiel positif dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	?	(conjecture de Mazur $\Rightarrow$ non)
$\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$	oui	
{premiers} $\subset \mathbb{Z}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **existentiel positif dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	?	(conjecture de Mazur $\Rightarrow$ non)
$\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$	oui	
$\{\text{premiers}\} \subset \mathbb{Z}$	oui	

Théorème (Davis-Putnam-Robinson-Matyasevich, 1970)

Soit $E \subset \mathbb{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *E est existentiel [positif] ;*
2. *E est récursivement énumérable (il existe un algorithme qui donne la liste des éléments de E).*

Corollaire (10$^{\text{e}}$ problème de Hilbert, réponse négative)

Il n'existe pas d'algorithme du type

entrée : $F \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$

sortie : *« oui » si $F = 0$ a une solution dans $\mathbb{Z}^n$, « non » sinon.*

Théorème (Davis-Putnam-Robinson-Matyasevich, 1970)

Soit $E \subset \mathbb{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *E est existentiel [positif] ;*
2. *E est récursivement énumérable (il existe un algorithme qui donne la liste des éléments de E).*

Corollaire (10e problème de Hilbert, réponse négative)

Il n'existe pas d'algorithme du type

entrée : $F \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$

sortie : *« oui » si $F = 0$ a une solution dans $\mathbb{Z}^n$, « non » sinon.*

Théorème (Davis-Putnam-Robinson-Matyasevich, 1970)

Soit $E \subset \mathbb{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *E est existentiel [positif] ;*
2. *E est récursivement énumérable (il existe un algorithme qui donne la liste des éléments de E).*

Corollaire (10^{e} problème de Hilbert, réponse négative)

Il n'existe pas d'algorithme du type

entrée : $F \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$

sortie : *« oui » si $F = 0$ a une solution dans $\mathbb{Z}^n$, « non » sinon.*

Corollaire

Si $\mathbb{Z}$ est existentiel [positif] dans $\mathbb{Q}$, alors il n'existe pas d'algorithme du type

entrée : $F \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$

sortie : *« oui » si $F = 0$ a une solution dans $\mathbb{Q}^n$, « non » sinon.*

L'existence d'un tel algorithme est une question ouverte.
Pour plus de détails, voir

http://math.berkeley.edu/~poonen/nt_is_hard.pdf

Corollaire

Si $\mathbb{Z}$ est existentiel [positif] dans $\mathbb{Q}$, alors il n'existe pas d'algorithme du type

entrée : $F \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$

sortie : *« oui » si $F = 0$ a une solution dans $\mathbb{Q}^n$, « non » sinon.*

L'existence d'un tel algorithme est une question ouverte.
Pour plus de détails, voir

http://math.berkeley.edu/∼poonen/nt_is_hard.pdf

Corollaire

Si $\mathbb{Z}$ est existentiel [positif] dans $\mathbb{Q}$, alors il n'existe pas d'algorithme du type

entrée : $F \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$

sortie : *« oui » si $F = 0$ a une solution dans $\mathbb{Q}^n$, « non » sinon.*

L'existence d'un tel algorithme est une question ouverte.
Pour plus de détails, voir

http://math.berkeley.edu/∼poonen/nt_is_hard.pdf

« Existentiel » contre « existentiel positif »

Il est clair que « existentiel positif » implique « existentiel ».

La réciproque est vraie (pour R donné) si et seulement si R vérifie la

Condition (C) :

$$R \setminus \{0\} \text{ est existentiel positif dans } R.$$

« Existentiel » contre « existentiel positif »

Il est clair que « existentiel positif » implique « existentiel ».

La réciproque est vraie (pour R donné) si et seulement si R vérifie la

Condition (C) :

$R \setminus \{0\}$ est existentiel positif dans R.

Condition (C) :

$R \setminus \{0\}$ est existentiel positif dans R.

Problèmes :

trouver des classes utiles d'anneaux vérifiant (C) ;

trouver des classes utiles d'anneaux ne vérifiant pas (C).

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis;
- les corps (non nul = inversible);
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C);
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C):

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis;
- les corps (non nul = inversible);
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C);
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C):

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis;
- les corps (non nul = inversible);
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C);
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C):

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis;
- les corps (non nul $=$ inversible);
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C);
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C):

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis;
- les corps (non nul $=$ inversible);
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C);
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C):

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis;
- les corps (non nul $=$ inversible);
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C);
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C): pour $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$t \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)(\exists y)\ t^2 = (1+2x)(1+3y)$$

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis;
- les corps (non nul = inversible);
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C);
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C): pour $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} t \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad & (\exists x)(\exists y)\; t^2 = (1+2x)(1+3y) \\ \Leftrightarrow \quad & (\exists w)(\exists x)(\exists y)\; tw = (1+2x)(1+3y). \end{aligned}$$

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis;
- les corps (non nul = inversible);
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C);
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C): pour $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} t \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)(\exists y)\ t^2 &= (1+2x)(1+3y) \\ \Leftrightarrow \quad (\exists w)(\exists x)(\exists y)\ tw &= (1+2x)(1+3y). \end{aligned}$$

- La dernière formule montre aussi que tout anneau d'entiers algébriques vérifie (C) .

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
- plus généralement: les anneaux compacts infinis (exemples: $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$);
- les produits infinis d'anneaux non nuls
- $R\left[(X_i)_{i\in I}\right]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
- plus généralement: les anneaux compacts infinis (exemples: $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$);
- les produits infinis d'anneaux non nuls
- $R\,[\,(X_i)_{i\in I}]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
(tout ensemble existentiel positif est p-adiquement compact);
- plus généralement: les anneaux compacts infinis
(exemples: $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$);
- les produits infinis d'anneaux non nuls
- $R\,[\,(X_i)_{i\in I}]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
  (tout ensemble existentiel positif est p-adiquement compact);
- plus généralement: les anneaux compacts infinis
  (exemples: $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$);
- les produits infinis d'anneaux non nuls
- $R\,[\,(X_i)_{i\in I}]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
  (tout ensemble existentiel positif est p-adiquement compact);
- plus généralement: les anneaux compacts infinis
  (exemples: $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$);
- les produits infinis d'anneaux non nuls
- $R\,[\,(X_i)_{i\in I}]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
  (tout ensemble existentiel positif est p-adiquement compact);
- plus généralement: les anneaux compacts infinis
  (exemples: $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$);
- les produits infinis d'anneaux non nuls
  (tout ensemble existentiel positif est fermé pour la topologie pro-discrète);
- $R\,[\,(X_i)_{i\in I}]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
  (tout ensemble existentiel positif est p-adiquement compact);
- plus généralement: les anneaux compacts infinis
  (exemples: $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$);
- les produits infinis d'anneaux non nuls
  (tout ensemble existentiel positif est fermé pour la topologie pro-discrète);
- $R\,[(X_i)_{i\in I}]$ (R anneau non nul, I infini).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Théorème 2

Soit R un anneau local noethérien hensélien, de dimension ≥ 1 et excellent.

Alors R ne vérifie pas (C).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Théorème 2

Soit R un anneau local noethérien hensélien, de dimension ≥ 1 et excellent.

Alors R ne vérifie pas (C).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Si R n'est pas local hensélien, il vérifie (C).

Théorème 2

Soit R un anneau local noethérien hensélien, de dimension ≥ 1 et excellent.

Alors R ne vérifie pas (C).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Si R n'est pas local hensélien, il vérifie (C).

Théorème 2

Soit R un anneau local noethérien hensélien, de dimension ≥ 1 et excellent.

Alors R ne vérifie pas (C).

Corollaire

R intègre noethérien

$S \subset R$ partie multiplicative

(1) Si $S \not\subset R^\times$, alors $S^{-1}R$ vérifie (C).

(2) Si R vérifie (C), alors $S^{-1}R$ vérifie (C).

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Corollaire

R intègre noethérien

$S \subset R$ partie multiplicative

(1) *Si $S \not\subset R^\times$, alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

(2) *Si R vérifie (C), alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Corollaire

R intègre noethérien

$S \subset R$ partie multiplicative

(1) *Si $S \not\subset R^\times$, alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

(2) *Si R vérifie (C), alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Corollaire

R intègre noethérien

$S \subset R$ partie multiplicative

(1) *Si $S \not\subset R^\times$, alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

(2) *Si R vérifie (C), alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Corollaire

R intègre noethérien

$S \subset R$ partie multiplicative

(1) *Si $S \not\subset R^\times$, alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

(2) *Si R vérifie (C), alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

On suppose que tout quotient intègre de R vérifie (C).

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

On suppose que tout quotient intègre de R vérifie (C).

Alors R vérifie (C).

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

On suppose que tout quotient intègre de R vérifie (C).

Alors R vérifie (C).
Plus généralement, tout anneau de fractions $S^{-1}R$ vérifie (C).

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

On suppose que tout quotient intègre de R vérifie (C).

Alors R vérifie (C).
Plus généralement, tout anneau de fractions $S^{-1}R$ vérifie (C).

Corollaire

Tout anneau de fractions d'un anneau de Jacobson noethérien vérifie (C).

Anneaux de fonctions analytiques

Théorème 3

Soit X un espace $\mathbb{C}$-analytique de Stein, irréductible et réduit.

Anneaux de fonctions analytiques

Théorème 3

Soit X un espace $\mathbb{C}$-analytique de Stein, irréductible et réduit

(par exemple un polydisque)

Anneaux de fonctions analytiques

Théorème 3

Soit X un espace $\mathbb{C}$-analytique de Stein, irréductible et réduit.

Alors l'anneau $\mathcal{H}(X)$ des fonctions holomorphes sur X vérifie (C).

Faits élémentaires :

- Si $I \subset R$ est un idéal de type fini et si R/I vérifie (C), alors $R \setminus I$ est existentiel positif dans R.
- (restriction de Weil) Si une R-algèbre finie libre non nulle vérifie (C), alors R vérifie (C).

Faits élémentaires :

- Si $I \subset R$ est un idéal de type fini et si R/I vérifie (C), alors $R \setminus I$ est existentiel positif dans R.
- (restriction de Weil) Si une R-algèbre finie libre non nulle vérifie (C), alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

Alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ *ne contient aucun idéal premier non nul,*

Alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ *ne contient aucun idéal premier non nul*

  (exemple: $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ et $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$).

Alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ *ne contient aucun idéal premier non nul,*
- $R/\mathfrak{p}$ *et* $R/\mathfrak{q}$ *vérifient (C).*

Alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ *ne contient aucun idéal premier non nul,*
- $R/\mathfrak{p}$ *et* $R/\mathfrak{q}$ *vérifient (C).*

Alors R vérifie (C).

Explicitement : pour $t \in R$, on a $t \neq 0$ si et seulement si

$$\exists x, y, z, \begin{cases} xy = zt \\ x \notin \mathfrak{p} \\ y \notin \mathfrak{q} \end{cases}$$

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ *ne contient aucun idéal premier non nul,*
- $R/\mathfrak{p}$ *et* $R/\mathfrak{q}$ *vérifient (C).*

Alors R vérifie (C).

Explicitement : pour $t \in R$, on a $t \neq 0$ si et seulement si

$$\exists x, y, z, \begin{cases} xy = zt \\ x \notin \mathfrak{p} \\ y \notin \mathfrak{q} \end{cases}$$

et les conditions $x \notin \mathfrak{p}$ et $y \notin \mathfrak{q}$ sont existentielles positives.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau $S = R[X]/(X^2 + X + 2)$ est libre de rang 2 sur R et a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau $S = R[X]/(X^2 + X + 2)$ est libre de rang 2 sur R et a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau $S = R[X]/(X^2 + X + 2)$ est libre de rang 2 sur R et a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau $S = R[X]/(X^2 + X + 2)$ est libre de rang 2 sur R et a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau $S = R[X]/(X^2 + X + 2)$ est libre de rang 2 sur R et a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau $S = R[X]/(X^2 + X + 2)$ est libre de rang 2 sur R et a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau $S = R[X]/(X^2 + X + 2)$ est libre de rang 2 sur R et a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Ceci ne marche pas pour $R = \mathbb{Z}_2$ (S n'est pas intègre).

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$.*

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$.*

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$.*

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$.*

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$.*

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$.*

Le cas non local

En combinant le lemme des deux idéaux, le lemme de dédoublement et une récurrence sur la dimension, on obtient :

Proposition

Donnéees : R intègre noethérien, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ *non nul.*

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Si $R/\mathfrak{p}$ *vérifie (C), R aussi.*

Corollaire

Tout anneau noethérien intègre non local vérifie (C).

Démonstration : appliquer la proposition à un idéal maximal de R.

Le cas non local

En combinant le lemme des deux idéaux, le lemme de dédoublement et une récurrence sur la dimension, on obtient :

Proposition

Donnéees : R intègre noethérien, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Si $R/\mathfrak{p}$ vérifie (C), R aussi.

Corollaire

Tout anneau noethérien intègre non local vérifie (C).

Démonstration : appliquer la proposition à un idéal maximal de R.

Le cas non local

En combinant le lemme des deux idéaux, le lemme de dédoublement et une récurrence sur la dimension, on obtient :

Proposition

Donnéees : R intègre noethérien, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Si $R/\mathfrak{p}$ vérifie (C), R aussi.

Corollaire

Tout anneau noethérien intègre non local vérifie (C).

Démonstration : appliquer la proposition à un idéal maximal de R.

Le cas non local

En combinant le lemme des deux idéaux, le lemme de dédoublement et une récurrence sur la dimension, on obtient :

Proposition

Donnéees : R intègre noethérien, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Si $R/\mathfrak{p}$ vérifie (C), R aussi.

Corollaire

Tout anneau noethérien intègre non local vérifie (C).

Démonstration : appliquer la proposition à un idéal maximal de R.

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

On écrit S comme quotient d'une algèbre finie libre R'.

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

On écrit S comme quotient d'une algèbre finie libre R'.

En jouant avec S, R' et la restriction de Weil, on montre alors que R vérifie (C).

Le cas hensélien :

propriétés d'approximation

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R, $\widehat{R}$ le complété I-adique de R. On considère les propriétés suivantes :

(PA) (« propriété d'approximation »)

Pour tout R-schéma X affine de type fini, $X(R)$ est dense dans $X(\widehat{R})$.

(PHI) (« principe de Hasse infinitésimal »)

Pour tout X affine de type fini sur R, si $X(R/I^q) \neq \emptyset$ pour tout $q \geq 0$, alors $X(R) \neq \emptyset$.

(PAF) (« propriété d'approximation forte »)

Pour tout X affine de type fini sur R et tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que

$$\operatorname{Im}\Big(X(R) \to X(R/I^q)\Big) = \operatorname{Im}\Big(X(R/I^{q+h}) \to X(R/I^q)\Big).$$

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R, $\widehat{R}$ le complété I-adique de R. On considère les propriétés suivantes :

(PA) (« propriété d'approximation »)

Pour tout R-schéma X affine de type fini, $X(R)$ est dense dans $X(\widehat{R})$.

(PHI) (« principe de Hasse infinitésimal »)

Pour tout X affine de type fini sur R, si $X(R/I^q) \neq \emptyset$ pour tout $q \geq 0$, alors $X(R) \neq \emptyset$.

(PAF) (« propriété d'approximation forte »)

Pour tout X affine de type fini sur R et tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{Im}\left(X(R) \to X(R/I^q)\right) = \mathrm{Im}\left(X(R/I^{q+h}) \to X(R/I^q)\right).$$

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R, $\widehat{R}$ le complété I-adique de R. On considère les propriétés suivantes :

(PA) (« propriété d'approximation »)

Pour tout R-schéma X affine de type fini, $X(R)$ est dense dans $X(\widehat{R})$.

(PHI) (« principe de Hasse infinitésimal »)

Pour tout X affine de type fini sur R, si $X(R/I^q) \neq \emptyset$ pour tout $q \geq 0$, alors $X(R) \neq \emptyset$.

(PAF) (« propriété d'approximation forte »)

Pour tout X affine de type fini sur R et tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{Im}\left(X(R) \to X(R/I^q)\right) = \mathrm{Im}\left(X(R/I^{q+h}) \to X(R/I^q)\right).$$

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R, $\widehat{R}$ le complété I-adique de R. On considère les propriétés suivantes :

(PA) (« propriété d'approximation »)

Pour tout R-schéma X affine de type fini, $X(R)$ est dense dans $X(\widehat{R})$.

(PHI) (« principe de Hasse infinitésimal »)

Pour tout X affine de type fini sur R, si $X(R/I^q) \neq \emptyset$ pour tout $q \geq 0$, alors $X(R) \neq \emptyset$.

(PAF) (« propriété d'approximation forte »)

Pour tout X affine de type fini sur R et tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que

$$\operatorname{Im}\Big(X(R) \to X(R/I^q)\Big) = \operatorname{Im}\Big(X(R/I^{q+h}) \to X(R/I^q)\Big).$$

- On a toujours (pour R et I donnés)

$$(\mathrm{PAF}) \Rightarrow (\mathrm{HI}) \Rightarrow (\mathrm{PA}).$$

- Les trois propriétés sont équivalentes si R est local d'idéal maximal I (Pfister-Popescu, Becker-Denef-Lipshitz-van den Dries).

- Elles sont vérifiées si R est local hensélien d'idéal maximal I et excellent (Greenberg, Artin, Popescu, Spivakovsky).

- On a toujours (pour R et I donnés)

$$(\mathrm{PAF}) \Rightarrow (\mathrm{HI}) \Rightarrow (\mathrm{PA}).$$

- Les trois propriétés sont équivalentes si R est local d'idéal maximal I (Pfister-Popescu, Becker-Denef-Lipshitz-van den Dries).

- Elles sont vérifiées si R est local hensélien d'idéal maximal I et excellent (Greenberg, Artin, Popescu, Spivakovsky).

- On a toujours (pour R et I donnés)
$$\text{(PAF)} \Rightarrow \text{(HI)} \Rightarrow \text{(PA)}.$$

- Les trois propriétés sont équivalentes si R est local d'idéal maximal I (Pfister-Popescu, Becker-Denef-Lipshitz-van den Dries).

- Elles sont vérifiées si R est local hensélien d'idéal maximal I et excellent (Greenberg, Artin, Popescu, Spivakovsky).

Lien entre (HI) et (C) :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. (R, I) *vérifie (HI);*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout sous-ensemble existentiel positif de R^n est fermé pour la topologie I-adique.*

(Démonstration directe à partir des définitions).

Lien entre (HI) et (C) :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. (R, I) *vérifie (HI);*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout sous-ensemble existentiel positif de R^n est fermé pour la topologie I-adique.*

(Démonstration directe à partir des définitions).

Corollaire

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R. On suppose que :

- *(R, I) vérifie (HI);*
- *I n'est pas nilpotent.*

Alors R ne vérifie pas (C).

Corollaire

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R. On suppose que :

- *(R, I) vérifie (HI);*
- *I n'est pas nilpotent.*

Alors R ne vérifie pas (C).

Démonstration : comme I n'est pas nilpotent,

Corollaire

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R. On suppose que :

- *(R, I) vérifie (HI);*
- *I n'est pas nilpotent.*

Alors R ne vérifie pas (C).

Démonstration : comme I n'est pas nilpotent,
la topologie I-adique n'est pas discrète.

Corollaire

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R. On suppose que :

- *(R, I) vérifie (HI);*
- *I n'est pas nilpotent.*

Alors R ne vérifie pas (C).

Démonstration : comme I n'est pas nilpotent,
la topologie I-adique n'est pas discrète.
Donc $R \setminus \{0\}$ n'est pas fermé,

Corollaire

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R. On suppose que :

- *(R, I) vérifie (HI);*
- *I n'est pas nilpotent.*

Alors R ne vérifie pas (C).

Démonstration : comme I n'est pas nilpotent,
la topologie I-adique n'est pas discrète.
Donc $R \setminus \{0\}$ n'est pas fermé,
donc il n'est pas existentiel positif.

Le théorème 2 en résulte :

Théorème

Soit R un anneau local noethérien hensélien, de dimension ≥ 1 et excellent.

Alors R ne vérifie pas (C).

Remarque :

les résultats précédents impliquent :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R non contenu dans un idéal premier minimal. Si (R, I) vérifie (HI), alors R est semi-local hensélien.

Remarque :

les résultats précédents impliquent :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R non contenu dans un idéal premier minimal. Si (R, I) vérifie (HI), alors R est semi-local hensélien.

Remarque :

les résultats précédents impliquent :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R non contenu dans un idéal premier minimal. Si (R, I) vérifie (HI), alors R est semi-local hensélien.

Par exemple $(\mathbb{Z}[[X]], (X))$ ne vérifie pas (HI).