La non-nullité dans un anneau est-elle diophantienne?

Laurent Moret-Bailly

IRMAR, Université de Rennes 1

Séminaire de géométrie et théorie des modèles,
7 mars 2008

Summary

1. Ensembles existentiels positifs
2. Résultats
3. Méthodes
4. Le cas hensélien : propriétés d'approximation

Conventions :

- Les anneaux sont commutatifs et unitaires.
- Pour les experts : si R est un anneau, on considérera la définissablilté sur R dans un langage $L(R)$ qui est le « langage des anneaux » $(+, \times, 0, 1)$, enrichi de:

Conventions :

- Les anneaux sont commutatifs et unitaires.
- Pour les experts : si R est un anneau, on considérera la définissablilté sur R dans un langage $L(R)$ qui est le « langage des anneaux » $(+, \times, 0, 1)$, enrichi de:

Conventions :

- Les anneaux sont commutatifs et unitaires.
- Pour les experts : si R est un anneau, on considérera la définissablilté sur R dans un langage $L(R)$ qui est le « langage des anneaux » $(+, \times, 0, 1)$, enrichi de:

Conventions :

- Les anneaux sont commutatifs et unitaires.
- Pour les experts : si R est un anneau, on considérera la définissablilté sur R dans un langage $L(R)$ qui est le « langage des anneaux » $(+, \times, 0, 1)$, enrichi de:
  - une constante pour chaque élément de R

Conventions :

- Les anneaux sont commutatifs et unitaires.
- Pour les experts : si R est un anneau, on considérera la définissablilté sur R dans un langage $L(R)$ qui est le « langage des anneaux » $(+, \times, 0, 1)$, enrichi de:
  - une constante pour chaque élément de R
  - la constante logique FAUX.

Ensembles existentiellement définissables :

Si R est un anneau et $n \in \mathbb{N}$, alors :

- les sous-ensembles *algébriques élémentaires* de R^n sont définis par des systèmes finis d'équations polynômes, à coefficients dans R :

$$\{t \in R^n \mid F_1(t) = \cdots = F_r(t) = 0\}$$

- les sous-ensembles *algébriques* de R^n sont les réunions finies d'ensembles algébriques élémentaires ;
- les sous-ensembles *constructibles* sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles algébriques (élémentaires) ;
- les sous-ensembles *existentiels positifs*, ou *diophantiens*, sont les projections de sous-ensembles algébriques d'un R^{n+p} ;
- les sous-ensembles *existentiels* sont les projections de sous-ensembles constructibles d'un R^{n+p}.

Ensembles existentiellement définissables :

Si R est un anneau et $n \in \mathbb{N}$, alors :

- les sous-ensembles *algébriques élémentaires* de R^n sont définis par des systèmes finis d'équations polynômes, à coefficients dans R :

$$\{t \in R^n \mid F_1(t) = \cdots = F_r(t) = 0\}$$

- les sous-ensembles *algébriques* de R^n sont les réunions finies d'ensembles algébriques élémentaires ;
- les sous-ensembles *constructibles* sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles algébriques (élémentaires) ;
- les sous-ensembles *existentiels positifs*, ou *diophantiens*, sont les projections de sous-ensembles algébriques d'un R^{n+p} ;
- les sous-ensembles *existentiels* sont les projections de sous-ensembles constructibles d'un R^{n+p}.

Ensembles existentiellement définissables :

Si R est un anneau et $n \in \mathbb{N}$, alors :

- les sous-ensembles *algébriques élémentaires* de R^n sont définis par des systèmes finis d'équations polynômes, à coefficients dans R :

$$\{t \in R^n \mid F_1(t) = \cdots = F_r(t) = 0\}$$

- les sous-ensembles *algébriques* de R^n sont les réunions finies d'ensembles algébriques élémentaires ;
- les sous-ensembles *constructibles* sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles algébriques (élémentaires) ;
- les sous-ensembles *existentiels positifs*, ou *diophantiens*, sont les projections de sous-ensembles algébriques d'un R^{n+p} ;
- les sous-ensembles *existentiels* sont les projections de sous-ensembles constructibles d'un R^{n+p}.

Ensembles existentiellement définissables :

Si R est un anneau et $n \in \mathbb{N}$, alors :

- les sous-ensembles *algébriques élémentaires* de R^n sont définis par des systèmes finis d'équations polynômes, à coefficients dans R :

$$\{t \in R^n \mid F_1(t) = \cdots = F_r(t) = 0\}$$

- les sous-ensembles *algébriques* de R^n sont les réunions finies d'ensembles algébriques élémentaires ;
- les sous-ensembles *constructibles* sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles algébriques (élémentaires) ;
- les sous-ensembles *existentiels positifs*, ou *diophantiens*, sont les projections de sous-ensembles algébriques d'un R^{n+p} ;
- les sous-ensembles *existentiels* sont les projections de sous-ensembles constructibles d'un R^{n+p}.

Ensembles existentiellement définissables :

Si R est un anneau et $n \in \mathbb{N}$, alors :

- les sous-ensembles *algébriques élémentaires* de R^n sont définis par des systèmes finis d'équations polynômes, à coefficients dans R :

$$\{t \in R^n \mid F_1(t) = \cdots = F_r(t) = 0\}$$

- les sous-ensembles *algébriques* de R^n sont les réunions finies d'ensembles algébriques élémentaires ;
- les sous-ensembles *constructibles* sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles algébriques (élémentaires) ;
- les sous-ensembles *existentiels positifs*, ou *diophantiens*, sont les projections de sous-ensembles algébriques d'un R^{n+p} ;
- les sous-ensembles *existentiels* sont les projections de sous-ensembles constructibles d'un R^{n+p}.

Remarques :

- on peut remplacer « projections » par « images par une application polynomiale »;
- si R est intègre, tout ensemble algébrique est élémentaire ;

Remarques :

- on peut remplacer « projections » par « images par une application polynomiale »;
- si R est intègre, tout ensemble algébrique est élémentaire ;

Remarques :

- les ensembles existentiels (positifs) sont les ensembles définissables par une formule existentielle (positive) dans le langage $L(R)$:

Remarques :

- les ensembles existentiels (positifs) sont les ensembles définissables par une formule existentielle (positive) dans le langage $L(R)$:
- un sous-ensemble diophantien de R est de la forme

$$\left\{ t \in R \;\middle|\; \exists \underline{x} \in R^n, \quad \bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{q} F_{i,j}(t, \underline{x}) = 0 \right\}$$

avec $F_{i,j} \in R[T, \underline{X}]$;

Remarques :

- les ensembles existentiels (positifs) sont les ensembles définissables par une formule existentielle (positive) dans le langage $L(R)$:
- un sous-ensemble existentiel de R est de la forme

$$\left\{ t \in R \;\middle|\; \exists \underline{x} \in R^n, \quad \bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{q} F_{i,j}(t, \underline{x}) \quad \begin{matrix} = \\ \neq \end{matrix} \; 0 \right\}$$

avec $F_{i,j} \in R[T, \underline{X}]$;

Remarques :

- les ensembles existentiels (positifs) sont les ensembles définissables par une formule existentielle (positive) dans le langage $L(R)$:
- un sous-ensemble existentiel de R est de la forme

$$\left\{ t \in R \,\middle|\, \exists \underline{x} \in R^n, \quad \bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{q} F_{i,j}(t, \underline{x}) \quad \begin{matrix} = \\ \neq \end{matrix} \; 0 \right\}$$

avec $F_{i,j} \in R[T, \underline{X}]$;

- la constante FAUX sert à assurer que l'ensemble vide est diophantien dans R^n lorsque R est l'anneau nul :

$$\emptyset = \{ t \in R^n \mid \text{FAUX} \};$$

Remarques :

- les ensembles existentiels (positifs) sont les ensembles définissables par une formule existentielle (positive) dans le langage $L(R)$:
- un sous-ensemble existentiel de R est de la forme

$$\left\{ t \in R \,\middle|\, \exists \underline{x} \in R^n, \quad \bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{q} F_{i,j}(t, \underline{x}) \quad \begin{matrix} = \\ \neq \end{matrix} \; 0 \right\}$$

avec $F_{i,j} \in R[T, \underline{X}]$;

- la constante FAUX sert à assurer que l'ensemble vide est diophantien dans R^n lorsque R est l'anneau nul :

$$\emptyset = \{ t \in R^n \mid \text{FAUX} \}; \quad \text{si } R \neq \{0\}, \quad \emptyset = \{ t \in R^n \mid 1 = 0 \}.$$

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$		
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$		
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$		
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$		
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$		
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$		
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	infini, à complémentaire infini
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	infini, à complémentaire infini
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$		

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	infini, à complémentaire infini
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	?	

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	infini, à complémentaire infini
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	?	(conjecture de Mazur $\Rightarrow$ non)

Exemples :

$E \subset R$	E **diophantien dans** R **?**	
$\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$	oui	carrés
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	oui	sommes de 4 carrés
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$	non	infinité de composantes connexes
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	non	infini, à complémentaire infini
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	?	(conjecture de Mazur $\Rightarrow$ non)

« $\mathbb{Z}$ diophantien dans $\mathbb{Q}$ » impliquerait une réponse négative au dixième problème de Hilbert pour $\mathbb{Q}$.

« Existentiel » contre « diophantien »

Il est clair que « diophantien » implique « existentiel ».

La réciproque est vraie (pour R donné) si et seulement si R vérifie la

Condition (C) :

$R \setminus \{0\}$ est diophantien dans R.

« Existentiel » contre « diophantien »

Il est clair que « diophantien » implique « existentiel ».

La réciproque est vraie (pour R donné) si et seulement si R vérifie la

Condition (C) :

$$R \setminus \{0\} \text{ est diophantien dans } R.$$

Condition (C) :

$R \setminus \{0\}$ est diophantien dans R.

Condition (C) :

$R \setminus \{0\}$ est diophantien dans R.

Problèmes :

trouver des classes utiles d'anneaux vérifiant (C) ;

trouver des classes utiles d'anneaux ne vérifiant pas (C).

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis ;
- les corps : $(t \neq 0) \Leftrightarrow (\exists x)(tx = 1)$;
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C) ;
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C) :

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis ;
- les corps : $(t \neq 0) \Leftrightarrow (\exists x)(tx = 1)$;
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C) ;
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C) :

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis ;
- les corps : $(t \neq 0) \Leftrightarrow (\exists x)(tx = 1)$;
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C) ;
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C) :

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis ;
- les corps : $(t \neq 0) \Leftrightarrow (\exists x)(tx = 1)$;
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C) ;
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C) :

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis ;
- les corps : $(t \neq 0) \Leftrightarrow (\exists x)(tx = 1)$;
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C) ;
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C) :

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis ;
- les corps : $(t \neq 0) \Leftrightarrow (\exists x)(tx = 1)$;
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C) ;
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C) : pour $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$t \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)(\exists y) \;\; t^2 \quad = \quad (1+2x)(1+3y)$$

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis ;
- les corps : $(t \neq 0) \Leftrightarrow (\exists x)(tx = 1)$;
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C) ;
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C) : pour $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$t \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)(\exists y) \;\; t^2 = (1+2x)(1+3y)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\exists w)(\exists x)(\exists y) \;\; tw = (1+2x)(1+3y).$$

Exemples d'anneaux vérifiant (C)

- les anneaux finis ;
- les corps : $(t \neq 0) \Leftrightarrow (\exists x)(tx = 1)$;
- $R_1 \times R_2$ vérifie (C) $\Leftrightarrow$ R_1 et R_2 vérifient (C) ;
- $\mathbb{Z}$ vérifie (C) : pour $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} t \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists x)(\exists y) \;\; t^2 \;\; = \;\; (1+2x)(1+3y) \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists w)(\exists x)(\exists y) \;\; tw \;\; = \;\; (1+2x)(1+3y). \end{aligned}$$

- La dernière formule montre aussi que tout anneau d'entiers algébriques vérifie (C).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
- plus généralement : les anneaux compacts infinis (exemples : $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$) ;
- les produits infinis d'anneaux non nuls
- $R\left[(X_i)_{i\in I}\right]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
- plus généralement : les anneaux compacts infinis (exemples : $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$) ;
- les produits infinis d'anneaux non nuls
- $R\left[(X_i)_{i\in I}\right]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
  (tout ensemble diophantien est p-adiquement compact) ;
- plus généralement : les anneaux compacts infinis
  (exemples : $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$) ;
- les produits infinis d'anneaux non nuls
- $R\left[(X_i)_{i\in I}\right]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
  (tout ensemble diophantien est p-adiquement compact) ;
- plus généralement : les anneaux compacts infinis
  (exemples : $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$) ;
- les produits infinis d'anneaux non nuls
- $R\left[(X_i)_{i\in I}\right]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
  (tout ensemble diophantien est p-adiquement compact) ;
- plus généralement : les anneaux compacts infinis
  (exemples : $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$) ;
- les produits infinis d'anneaux non nuls
- $R\left[(X_i)_{i\in I}\right]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
  (tout ensemble diophantien est p-adiquement compact) ;
- plus généralement : les anneaux compacts infinis
  (exemples : $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$) ;
- les produits infinis d'anneaux non nuls
  (tout ensemble diophantien est fermé pour la topologie pro-discrète) ;
- $R\left[(X_i)_{i\in I}\right]$ (R anneau non nul, I infini).

Exemples d'anneaux ne vérifiant pas (C)

- $\mathbb{Z}_p$ (p premier)
  (tout ensemble diophantien est p-adiquement compact) ;
- plus généralement : les anneaux compacts infinis
  (exemples : $\mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$) ;
- les produits infinis d'anneaux non nuls
  (tout ensemble diophantien est fermé pour la topologie pro-discrète) ;
- $R\left[(X_i)_{i\in I}\right]$ (R anneau non nul, I infini).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Corollaire

R intègre noethérien ; $S \subset R$ partie multiplicative

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Corollaire

R intègre noethérien ; $S \subset R$ partie multiplicative

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Si R n'est pas local hensélien, il vérifie (C).

Corollaire

R intègre noethérien ; $S \subset R$ partie multiplicative

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Si R n'est pas local hensélien, il vérifie (C).

Corollaire

R intègre noethérien ; $S \subset R$ partie multiplicative

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Si R n'est pas local hensélien, il vérifie (C).

Corollaire

R intègre noethérien ; $S \subset R$ partie multiplicative

(1) *Si $S \not\subset R^\times$, alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Si R n'est pas local hensélien, il vérifie (C).

Corollaire

R intègre noethérien ; $S \subset R$ partie multiplicative

(1) *Si $S \not\subset R^\times$, alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Si R n'est pas local hensélien, il vérifie (C).

Corollaire

R intègre noethérien ; $S \subset R$ partie multiplicative

(1) *Si $S \not\subset R^\times$, alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

(2) *Si R vérifie (C), alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Cas noethérien : résultats

Théorème 1

Soit R un anneau intègre noethérien.

Si R n'est pas local hensélien, il vérifie (C).

Corollaire

R intègre noethérien ; $S \subset R$ partie multiplicative

(1) *Si $S \not\subset R^\times$, alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

(2) *Si R vérifie (C), alors $S^{-1}R$ vérifie (C).*

Démonstration : (1) $S^{-1}R$ n'est jamais local hensélien.

(2) est conséquence de (1).

Cas noethérien : résultats

Que se passe-t-il dans le cas local hensélien ?

Théorème 2

Cas noethérien : résultats

Que se passe-t-il dans le cas local hensélien ?

Théorème 2

Soit R un anneau local hensélien excellent, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Cas noethérien : résultats

Que se passe-t-il dans le cas local hensélien ?

Théorème 2

Soit R un anneau local hensélien excellent, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout sous-ensemble diophantien de R^n est fermé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

Cas noethérien : résultats

Que se passe-t-il dans le cas local hensélien ?

Théorème 2

Soit R un anneau local hensélien excellent, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout sous-ensemble diophantien de R^n est fermé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

En particulier, si $\dim R \geq 1$, R ne vérifie pas (C).

Cas noethérien : résultats

Que se passe-t-il dans le cas local hensélien ?

Théorème 2

Soit R un anneau local hensélien excellent, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout sous-ensemble diophantien de R^n est fermé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

En particulier, si $\dim R \geq 1$, *R ne vérifie pas (C).*

Remarque :

il existe un anneau de valuation discrète hensélien qui vérifie (C).

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

On suppose que tout quotient intègre de R vérifie (C).

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

On suppose que tout quotient intègre de R vérifie (C).

Alors R vérifie (C). Plus généralement, tout anneau de fractions $S^{-1}R$ vérifie (C).

Anneaux noethériens non intègres

Proposition

Soit R un anneau noethérien.

On suppose que tout quotient intègre de R vérifie (C).

Alors R vérifie (C). Plus généralement, tout anneau de fractions $S^{-1}R$ vérifie (C).

(démonstration facile par dévissage)

Corollaire

Tout anneau artinien vérifie (C).

Corollaire

Tout anneau artinien vérifie (C).

Corollaire

Tout anneau de fractions d'un anneau de Jacobson noethérien vérifie (C).

Corollaire

Tout anneau artinien vérifie (C).

Corollaire

Tout anneau de fractions d'un anneau de Jacobson noethérien vérifie (C).

(Exemples : les algèbres de type fini sur un corps, ou sur $\mathbb{Z}$)

Un exemple non noethérien

Théorème 3

Soit X un espace $\mathbb{C}$-analytique de Stein, irréductible et réduit

Un exemple non noethérien

Théorème 3

Soit X un espace $\mathbb{C}$-analytique de Stein, irréductible et réduit.

Un exemple non noethérien

Théorème 3

Soit X un espace $\mathbb{C}$-analytique de Stein, irréductible et réduit

(par exemple un polydisque)

Un exemple non noethérien

Théorème 3

Soit X un espace $\mathbb{C}$-analytique de Stein, irréductible et réduit.

Alors l'anneau $\mathcal{H}(X)$ des fonctions holomorphes sur X vérifie (C).

Faits élémentaires :

- Si $I \subset R$ est un idéal de type fini et si R/I vérifie (C), alors $R \setminus I$ est diophantien dans R.

- (restriction de Weil) Si une R-algèbre finie libre non nulle vérifie (C), alors R vérifie (C).

Faits élémentaires :

- Si $I \subset R$ est un idéal de type fini et si R/I vérifie (C), alors $R \setminus I$ est diophantien dans R.

- (restriction de Weil) Si une R-algèbre finie libre non nulle vérifie (C), alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

Alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ *ne contient aucun idéal premier non nul,*

Alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ *ne contient aucun idéal premier non nul*
  (exemple : $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ et $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$).

Alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- *$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ ne contient aucun idéal premier non nul,*
- *$R/\mathfrak{p}$ et $R/\mathfrak{q}$ vérifient (C).*

Alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- *$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ ne contient aucun idéal premier non nul,*
- *$R/\mathfrak{p}$ et $R/\mathfrak{q}$ vérifient (C).*

Alors R vérifie (C).

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- *$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ ne contient aucun idéal premier non nul,*
- *$R/\mathfrak{p}$ et $R/\mathfrak{q}$ vérifient (C).*

Alors R vérifie (C).

Explicitement : pour $t \in R$, on a $t \neq 0$ si et seulement si

$$\exists x, y, z, \begin{cases} xy = zt \\ x \notin \mathfrak{p} \\ y \notin \mathfrak{q} \end{cases}$$

Lemme (des deux idéaux)

Données : R noethérien intègre ; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$.

On suppose que :

- *$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ ne contient aucun idéal premier non nul,*
- *$R/\mathfrak{p}$ et $R/\mathfrak{q}$ vérifient (C).*

Alors R vérifie (C).

Explicitement : pour $t \in R$, on a $t \neq 0$ si et seulement si

$$\exists x, y, z, \begin{cases} xy = zt \\ x \notin \mathfrak{p} \\ y \notin \mathfrak{q} \end{cases}$$

et les conditions $x \notin \mathfrak{p}$ et $y \notin \mathfrak{q}$ sont diophantiennes.

Corollaire

Soit A intègre noethérien vérifiant (C). Alors $A[X]$ vérifie (C).

Démonstration : appliquer le lemme des deux idéaux avec $\mathfrak{p} = (X)$ et $\mathfrak{q} = (X - 1)$.

Corollaire

Soit A intègre noethérien vérifiant (C). Alors $A[X]$ vérifie (C).

Démonstration : appliquer le lemme des deux idéaux avec $\mathfrak{p} = (X)$ et $\mathfrak{q} = (X - 1)$.

Corollaire

Soit A intègre noethérien vérifiant (C). Alors $A[X]$ vérifie (C).

Démonstration : appliquer le lemme des deux idéaux avec $\mathfrak{p} = (X)$ et $\mathfrak{q} = (X - 1)$.

Remarque : on peut supprimer l'hypothèse noethérienne du corollaire en raffinant le lemme des deux idéaux.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau

$$S = R[X]/(X^2 + X + 2)$$

- est libre de rang 2 sur R ;
- a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau

$$S = R[X]/(X^2 + X + 2)$$

- est libre de rang 2 sur R ;
- a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau

$$S = R[X]/(X^2 + X + 2)$$

- est libre de rang 2 sur R ;
- a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau

$$S = R[X]/(X^2 + X + 2)$$

- est libre de rang 2 sur R ;
- a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau

$$S = R[X]/(X^2 + X + 2)$$

- est libre de rang 2 sur R ;
- a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Le lemme des deux idéaux ne s'applique pas (par exemple) si R est local de dimension 1.

Dans ce cas, on peut (parfois) remplacer R par une R-algèbre finie libre qui n'est pas locale.

Exemple : $R = \mathbb{Z}_{(2)}$. L'anneau

$$S = R[X]/(X^2 + X + 2)$$

- est libre de rang 2 sur R ;
- a deux idéaux maximaux (de hauteur 1).

Le lemme des deux idéaux implique que S vérifie (C), donc R aussi par restriction de Weil.

Ceci ne marche pas pour $R = \mathbb{Z}_2$ (S n'est pas intègre).

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre ;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$ (puisque $F = X(X + a)$ modulo $\mathfrak{p}$).*

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre ;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$ (puisque $F = X(X + a)$ modulo $\mathfrak{p}$).*

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre ;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$ (puisque $F = X(X + a)$ modulo $\mathfrak{p}$).*

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre ;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$ (puisque $F = X(X + a)$ modulo $\mathfrak{p}$).*

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre ;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$ (puisque $F = X(X + a)$ modulo $\mathfrak{p}$).*

Lemme (de dédoublement)

R intègre noethérien, $K = \mathrm{Frac}\,(R)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Alors il existe un polynôme

$$F = X^2 + aX + b \in R[X]$$

tel que $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$, et F est irréductible dans $K[X]$.

En particulier, la R-algèbre $S := R[X]/(F)$ a les propriétés suivantes :

- *S est intègre ;*
- *S est libre de rang 2 comme R-module,*
- *S a deux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$, à quotients isomorphes à $R/\mathfrak{p}$ (puisque $F = X(X + a)$ modulo $\mathfrak{p}$).*

Le cas non local

En combinant le lemme des deux idéaux, le lemme de dédoublement et une récurrence sur la dimension, on obtient :

Proposition

Donnéees : R intègre noethérien, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Si $R/\mathfrak{p}$ vérifie (C), R aussi.

Corollaire

Tout anneau noethérien intègre non local vérifie (C).

Démonstration : appliquer la proposition à un idéal maximal de R.

Le cas non local

En combinant le lemme des deux idéaux, le lemme de dédoublement et une récurrence sur la dimension, on obtient :

Proposition

Donnéees : R intègre noethérien, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Si $R/\mathfrak{p}$ vérifie (C), R aussi.

Corollaire

Tout anneau noethérien intègre non local vérifie (C).

Démonstration : appliquer la proposition à un idéal maximal de R.

Le cas non local

En combinant le lemme des deux idéaux, le lemme de dédoublement et une récurrence sur la dimension, on obtient :

Proposition

Donnéees : R intègre noethérien, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Si $R/\mathfrak{p}$ vérifie (C), R aussi.

Corollaire

Tout anneau noethérien intègre non local vérifie (C).

Démonstration : appliquer la proposition à un idéal maximal de R.

Le cas non local

En combinant le lemme des deux idéaux, le lemme de dédoublement et une récurrence sur la dimension, on obtient :

Proposition

Donnéees : R intègre noethérien, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ non nul.

On suppose que R n'est pas local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Si $R/\mathfrak{p}$ vérifie (C), R aussi.

Corollaire

Tout anneau noethérien intègre non local vérifie (C).

Démonstration : appliquer la proposition à un idéal maximal de R.

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

On écrit $S = L/\mathfrak{p}$, où L est finie libre sur R. (L n'est pas nécessairement intègre !)

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

On écrit $S = L/\mathfrak{p}$, où L est finie libre sur R.

$L/\mathfrak{p}$ vérifie (C), donc $L \setminus \mathfrak{p}$ est diophantien dans L, et aussi dans le R-module libre sous-jacent à L.

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

On écrit $S = L/\mathfrak{p}$, où L est finie libre sur R.

$L/\mathfrak{p}$ vérifie (C), donc $L \setminus \mathfrak{p}$ est diophantien dans L, et aussi dans le R-module libre sous-jacent à L.

On peut supposer (quitte à changer S) que $\mathfrak{p}$ est minimal dans L. Comme L est plat sur R (et R intègre), on a alors $R \cap \mathfrak{p} = \{0\}$. Donc

$$R \cap (L \setminus \mathfrak{p}) = R \setminus \{0\}$$

est diophantien dans R, cqfd.

Fin de la démonstration du théorème 1 : le cas non hensélien

Si R est local, noethérien et non hensélien, il existe une R-algèbre finie S intègre et non locale, donc vérifiant (C).

On écrit $S = L/\mathfrak{p}$, où L est finie libre sur R.

$L/\mathfrak{p}$ vérifie (C), donc $L \setminus \mathfrak{p}$ est diophantien dans L, et aussi dans le R-module libre sous-jacent à L.

On peut supposer (quitte à changer S) que $\mathfrak{p}$ est minimal dans L. Comme L est plat sur R (et R intègre), on a alors $R \cap \mathfrak{p} = \{0\}$. Donc

$$R \cap (L \setminus \mathfrak{p}) = R \setminus \{0\}$$

est diophantien dans R, cqfd.

Le cas hensélien :

propriétés d'approximation

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R, $\widehat{R}$ le complété I-adique de R. On considère les propriétés suivantes :

(PA) (« propriété d'approximation »)

Pour tout R-schéma X affine de type fini, $X(R)$ est dense dans $X(\widehat{R})$.

(HI) (« principe de Hasse infinitésimal »)

Pour tout X affine de type fini sur R, si $X(R/I^q) \neq \emptyset$ pour tout $q \geq 0$, alors $X(R) \neq \emptyset$.

(PAF) (« propriété d'approximation forte »)

Pour tout X affine de type fini sur R et tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{Im}\left(X(R) \to X(R/I^q)\right) = \mathrm{Im}\left(X(R/I^{q+h}) \to X(R/I^q)\right).$$

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R, $\widehat{R}$ le complété I-adique de R. On considère les propriétés suivantes :

(PA) (« propriété d'approximation »)

Pour tout R-schéma X affine de type fini, $X(R)$ est dense dans $X(\widehat{R})$.

(HI) (« principe de Hasse infinitésimal »)

Pour tout X affine de type fini sur R, si $X(R/I^q) \neq \emptyset$ pour tout $q \geq 0$, alors $X(R) \neq \emptyset$.

(PAF) (« propriété d'approximation forte »)

Pour tout X affine de type fini sur R et tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{Im}\left(X(R) \to X(R/I^q)\right) = \mathrm{Im}\left(X(R/I^{q+h}) \to X(R/I^q)\right).$$

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R, $\widehat{R}$ le complété I-adique de R. On considère les propriétés suivantes :

(PA) (« propriété d'approximation »)

Pour tout R-schéma X affine de type fini, $X(R)$ est dense dans $X(\widehat{R})$.

(HI) (« principe de Hasse infinitésimal »)

Pour tout X affine de type fini sur R, si $X(R/I^q) \neq \emptyset$ pour tout $q \geq 0$, alors $X(R) \neq \emptyset$.

(PAF) (« propriété d'approximation forte »)

Pour tout X affine de type fini sur R et tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{Im}\left(X(R) \to X(R/I^q)\right) = \mathrm{Im}\left(X(R/I^{q+h}) \to X(R/I^q)\right).$$

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R, $\widehat{R}$ le complété I-adique de R. On considère les propriétés suivantes :

(PA) (« propriété d'approximation »)

Pour tout R-schéma X affine de type fini, $X(R)$ est dense dans $X(\widehat{R})$.

(HI) (« principe de Hasse infinitésimal »)

Pour tout X affine de type fini sur R, si $X(R/I^q) \neq \emptyset$ pour tout $q \geq 0$, alors $X(R) \neq \emptyset$.

(PAF) (« propriété d'approximation forte »)

Pour tout X affine de type fini sur R et tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{Im}\left(X(R) \to X(R/I^q)\right) = \mathrm{Im}\left(X(R/I^{q+h}) \to X(R/I^q)\right).$$

- On a toujours (pour R et I donnés)
$$(\mathrm{PAF}) \Rightarrow (\mathrm{HI}) \Rightarrow (\mathrm{PA}).$$

- Les trois propriétés sont équivalentes si R est local d'idéal maximal I (Pfister-Popescu, Becker-Denef-Lipshitz-van den Dries).

- Elles sont vérifiées si R est local hensélien d'idéal maximal I et excellent (Greenberg, Artin, Popescu, Spivakovsky).

- On a toujours (pour R et I donnés)
$$(\mathrm{PAF}) \Rightarrow (\mathrm{HI}) \Rightarrow (\mathrm{PA}).$$

- Les trois propriétés sont équivalentes si R est local d'idéal maximal I (Pfister-Popescu, Becker-Denef-Lipshitz-van den Dries).

- Elles sont vérifiées si R est local hensélien d'idéal maximal I et excellent (Greenberg, Artin, Popescu, Spivakovsky).

- On a toujours (pour R et I donnés)
$$(\mathrm{PAF}) \Rightarrow (\mathrm{HI}) \Rightarrow (\mathrm{PA}).$$

- Les trois propriétés sont équivalentes si R est local d'idéal maximal I (Pfister-Popescu, Becker-Denef-Lipshitz-van den Dries).

- Elles sont vérifiées si R est local hensélien d'idéal maximal I et excellent (Greenberg, Artin, Popescu, Spivakovsky).

Lien entre (HI) et (C) :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *(R, I) vérifie (HI) ;*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout sous-ensemble diophantien de R^n est fermé pour la topologie I-adique.*

(Démonstration directe à partir des définitions).

Lien entre (HI) et (C) :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *(R, I) vérifie (HI) ;*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout sous-ensemble diophantien de R^n est fermé pour la topologie I-adique.*

(Démonstration directe à partir des définitions).

Le théorème 2 en résulte :

Théorème

Soit R un anneau local hensélien excellent, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout sous-ensemble diophantien de R^n est fermé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

En particulier, si $\dim R \geq 1$, R ne vérifie pas (C).

Remarque :

les résultats précédents impliquent :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R non contenu dans un idéal premier minimal. Si (R, I) vérifie (HI) (et a fortiori s'il vérifie (PAF)), alors R est semi-local hensélien.

Remarque :

les résultats précédents impliquent :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R non contenu dans un idéal premier minimal. Si (R, I) vérifie (HI) (et a fortiori s'il vérifie (PAF)), alors R est semi-local hensélien.

Remarque :

les résultats précédents impliquent :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R non contenu dans un idéal premier minimal. Si (R, I) vérifie (HI) (et a fortiori s'il vérifie (PAF)), alors R est semi-local hensélien.

Par exemple $\big(\mathbb{Z}[[X]], (X)\big)$ ne vérifie pas (HI).

Remarque :

les résultats précédents impliquent :

Proposition

Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R non contenu dans un idéal premier minimal. Si (R, I) vérifie (HI) (et a fortiori s'il vérifie (PAF)), alors R est semi-local hensélien.

Par exemple $\big(\mathbb{Z}[[X]], (X)\big)$ ne vérifie pas (HI).

Remarque : Spivakovsky avait déjà donné des exemples de couples henséliens excellents ne vérifiant pas (HI), en réponse à une question de Popescu.