

Approximation forte et topologie des variétés sur un corps valué

Laurent Moret-Bailly

IRMAR, Université de Rennes 1

Conférence en l'honneur de Gérard Laumon
Orsay, 25 juin 2012

*Une partie des résultats de cet exposé fait l'objet
d'un travail en cours avec Philippe Gille (CNRS)*

Notations (pour tout l'exposé)

- R : un anneau de valuation (le plus souvent hensélien)
- $K = \text{Frac}(R)$
- Γ : le groupe de la valuation, $\Gamma_+ := \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha \geq 0\}$
- $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{+\infty\}$: la valuation
- Pour $\alpha \in \Gamma_+$ on pose :
 - ▶ $I_\alpha := \{x \in R \mid v(x) \geq \alpha\}$ (idéal principal de R)
 - ▶ $R_\alpha := R/I_\alpha$
- $\hat{R} := \varprojlim_{\alpha} R_\alpha$, $\hat{K} := \text{Frac}(\hat{R})$ (les complétés de R et de K).

La topologie de la valuation

Le corps valué K est un **corps topologique** ; les idéaux I_α de R ($\alpha \in \Gamma_+$) forment une base de voisinages de 0.

Par suite, pour tout K -schéma X de type fini, on a une **topologie naturelle sur $X(K)$** : une base d'ouverts est formée des ensembles

$$\{x \in U(K) \mid v(f_i(x)) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

pour $U \subset X$ ouvert affine et $f_i \in H^0(U, \mathcal{O}_U)$.

Autre base d'ouverts (équivalente) : les ensembles

$$\text{Im}(\mathcal{X}(R) \rightarrow X(K))$$

où \mathcal{X} parcourt les R -schémas de présentation finie à fibre générique X .

Un K -morphisme $f : X \rightarrow Y$ induit une **application continue**

$$f_{\text{top}} : X(K) \rightarrow Y(K).$$

La topologie de la valuation : le cas des R -schémas

Si \mathcal{X} est un R -schéma séparé de présentation finie, alors $\mathcal{X}(R)$ s'identifie par l'injection

$$\mathcal{X}(R) \hookrightarrow \mathcal{X}(K) = \mathcal{X}_K(K)$$

à un ouvert fermé de $\mathcal{X}(K)$. (Pour « fermé », on utilise le théorème de compactification de Nagata).

Remarque : on peut définir la topologie de $\mathcal{X}(R)$ directement, même si \mathcal{X} n'est plus nécessairement séparé.

L'espace $\mathcal{X}(R)$ est alors toujours séparé.

Problème (très) général :

étude des propriétés topologiques des espaces $X(K)$
et des applications continues $f_{\text{top}} : X(K) \rightarrow Y(K)$.

Par exemple :

f_{top} ouverte ? fermée ?

$f_{\text{top}}(X(K)) \subset Y(K)$ ouvert ? fermé ? constructible ?

Premières réponses :

Proposition 1

On suppose K *hensélien*.

Si $f : X \rightarrow Y$ est *lisse*, alors $f_{\text{top}} : X(K) \rightarrow Y(K)$ est *ouverte*.

Si f est *étale*, alors $f_{\text{top}} : X(K) \rightarrow Y(K)$ est un *homéomorphisme local*.

Proposition 2

On suppose K *algébriquement fermé dans \widehat{K}* .

Si $f : X \rightarrow Y$ est *fini*, alors $f_{\text{top}} : X(K) \rightarrow Y(K)$ est *fermée*.

Proposition 3 (LMB)

On suppose K *algébriquement clos*. Conditions équivalentes (pour $f : X \rightarrow Y$ donné) :

- 1 f est universellement ouvert ;
- 2 $f_{\text{top}} : X(K) \rightarrow Y(K)$ est ouverte.

Suite de notre programme

- présentation d'outils plus spécialisés :
 - ▶ le « principe de Hasse approché » ;
 - ▶ un théorème de constructibilité (Bernstein) ;
 - ▶ un théorème de compactification (Gabber).

- application à des morphismes particuliers (torseurs).

Le « principe de Hasse approché »

Théorème 1

On suppose R hensélien et \widehat{K} séparable sur K .

Pour tout R -schéma X de présentation finie, on a l'équivalence :

$$X(R) \neq \emptyset \iff \forall \alpha \in \Gamma, X(R_\alpha) \neq \emptyset.$$

Résulte du « théorème d'approximation fort » :

- Greenberg (1966) si $\Gamma = \mathbb{Z}$, i.e. si R est un Avdex (anneau de valuation discrète d'excellence) ;
- LMB (2011) en général (voir fin de l'exposé).

Interprétation topologique du principe de Hasse approché

Proposition 4

On suppose R hensélien et \widehat{K}/K séparable.

*Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un morphisme de R -schémas de présentation finie, l'image $f(\mathcal{X}(R)) \subset \mathcal{Y}(R)$ est **fermée** pour la topologie de la valuation.*

Cet énoncé est équivalent au P.H.A. (exercice).

Si \mathcal{Y} est séparé, on en déduit que l'image de $\mathcal{X}(R)$ est aussi **fermée dans $\mathcal{Y}(K)$** (puisque $\mathcal{Y}(R)$ est fermé dans $\mathcal{Y}(K)$).

Corollaire 1

On suppose R hensélien et \widehat{K}/K séparable. Soit X un K -schéma de type fini.

Alors X admet une base \mathcal{V} d'ouverts ayant la propriété suivante :

pour tout K -morphisme $f : X \rightarrow Y$, où Y est séparé de type fini, et tout $V \in \mathcal{V}$, l'image $f_{\text{top}}(V)$ est fermée dans $Y(K)$.

(Prendre pour \mathcal{V} l'ensemble des $\mathcal{X}(R)$, où \mathcal{X} parcourt les R -modèles de X .)

Remarque : c'est trivial si K est un **corps local** (prendre pour \mathcal{V} l'ensemble des ouverts compacts).

Corollaire 2

On suppose R hensélien et \widehat{K}/K séparable.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme **propre** de K -schémas de type fini. Alors $f(X(K))$ est fermé dans $Y(K)$.

Remarque : si K est un **corps local**, $f_{\text{top}} : X(K) \rightarrow Y(K)$ est propre.

Mais **en général**, f_{top} n'est pas fermée.

Le théorème de constructibilité

Théorème 2 (Bernstein, 1976)

Soit K un corps *local*, et soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de K -variétés.
Alors $f_{\text{top}}(X(K))$ est *constructible* dans $Y(K)$.

Remarques :

- c'est immédiat en caractéristique nulle (et plus généralement pour K hensélien de caractéristique nulle) : on peut stratifier X et Y de telle sorte que f induise des morphismes lisses entre les strates.
- Généralisation (Gille-LMB) : K hensélien de caractéristique $p > 0$, $[K : K^p] < +\infty$, condition supplémentaire sur l'extension $K^{1/p}/K$.

Espaces homogènes

Données :

- un K -groupe algébrique G (= un K -schéma en groupes de type fini) ;
- un sous-groupe algébrique H de G .

On note X l'espace homogène G/H . On s'intéresse au morphisme canonique

$$f : G \twoheadrightarrow X = G/H.$$

On note $x_0 = f(e) \in X(K)$ la classe neutre.

En passant aux points rationnels, l'application

$$f_{\text{top}} : G(K) \longrightarrow X(K)$$

induit une **bijection continue**

$$G(K)/H(K) \longrightarrow G(K).x_0 \subset X(K).$$

Espaces homogènes : points rationnels

$$G(K)/H(K) \longleftrightarrow G(K).x_0 \subset X(K)$$

- L'orbite $G(K).x_0$ est-elle localement fermée (voire fermée) dans $X(K)$?
- La bijection ci-dessus est-elle un homéomorphisme ?

La réponse est oui (pour les deux questions)

- 1 si H est **lisse** (exemple : car $K = 0$) et K **hensélien** ; dans ce cas, l'orbite $G(K).x_0$ est ouverte et fermée ;
- 2 $K = \mathbb{F}_q((t))$ (Bernstein-Zelevinsky, 1976).

Le deuxième cas se déduit du théorème de constructibilité et d'un argument classique ($G(K)$ est **localement compact à base dénombrable**, et l'orbite est un **espace de Baire**).

Généralisation

Théorème 3 (Gille-LMB)

On suppose que K est un corps valué **complet de rang 1** et de caractéristique $p > 0$, et que :

- $[K : K^p] < +\infty$,
- l'espace K est à base dénombrable (c.à.d. séparable).

Alors, pour G, H, X, x_0 comme précédemment, $G(K).x_0$ est localement fermé dans $X(K)$ et la bijection naturelle

$$G(K)/H(K) \longrightarrow G(K).x_0$$

est un homéomorphisme.

C'est une conséquence de la généralisation du théorème de constructibilité, avec le même argument que précédemment ; la compacité locale est remplacée par le corollaire 1 (existence d'une base d'ouverts d'images fermées).

Utilisation d'une compactification

Soit G un K -groupe algébrique. Il existe un **plus grand sous- K -schéma (en groupes) lisse G_0** de G (l'adhérence de Zariski de l'ensemble des points de G à corps résiduel séparable sur K).

Théorème 4 (Gabber)

Le quotient $Q := G/G_0$ admet une compactification projective G -équivariante \overline{Q} telle que $\overline{Q} - Q$ n'ait aucun point séparable sur K .

On en déduit le théorème suivant :

Utilisation d'une compactification

Théorème 5 (Gille-LMB)

On suppose que K est un **corps local**. Soient G un K -groupe algébrique, Y une K -variété et $f : X \rightarrow Y$ un G_Y -torseur.

Alors l'image de $f_{\text{top}} : X(K) \rightarrow Y(K)$ est localement fermée, et f_{top} induit un homéomorphisme

$$X(K)/G(K) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(f_{\text{top}}).$$

Pour la démonstration, on introduit la compactification \bar{Q} de $Q = G/G_0$ (théorème précédent), et l'on décompose f en

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \bar{Z} & \longrightarrow & Y. \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & X/G_0 & & X \wedge^G \bar{Q} & & \end{array}$$

Suite de l'exposé :

esquisse de démonstration du principe de Hasse approché

(méthode due à Becker-Denef-Lipshitz-van den Dries, 1979)

Ultraproduits : définition

Soient W un ensemble infini et $A = (A_w)_{w \in W}$ une famille d'ensembles. On voit A comme un faisceau \underline{A} sur l'espace discret W .

On a un plongement ouvert dense canonique

$$j : W \hookrightarrow \overline{W} \quad := \quad \text{compactifié de Stone-Čech (universel) de } W$$

d'où un faisceau $j_*\underline{A}$ sur \overline{W} .

Soit $u : \{\text{pt}\} \hookrightarrow \overline{W}$ un point de $\overline{W} \setminus W$. La fibre

$$u^*j_*\underline{A} = (j_*\underline{A})_u$$

est par définition l'**ultraproduit** de A associé à u , noté $\text{ulim}_{u,W} A_w$ (notation de H. Schoutens).

Le point u correspond à un **ultrafiltre** (non trivial) $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(W)$; la définition habituelle de la fibre donne alors

$$\text{ulim}_{\mathcal{U},W} A_w = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ W' \in \mathcal{U}}} \prod_{w \in W'} A_w.$$

Ultraproduits : définition

$$\begin{aligned} \operatorname{ulim}_{\mathcal{U}, w} A_w &:= (j_* \underline{A})_{\mathcal{U}} \\ &= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ W' \in \mathcal{U}}} \prod_{w \in W'} A_w. \end{aligned}$$

Si chaque A_w est non vide, on a la formule plus connue

$$\operatorname{ulim}_{\mathcal{U}, w} A_w = \left(\prod_{w \in W} A_w \right) / \sim_{\mathcal{U}}$$

où la relation d'équivalence $\sim_{\mathcal{U}}$ est l'égalité « \mathcal{U} -presque partout » :

$$(x_w) \sim_{\mathcal{U}} (y_w) \iff \{w \mid x_w = y_w\} \in \mathcal{U}.$$

Si les A_w sont un même A , on obtient l'ultrapuissance

$$A^* = \operatorname{upw}_{\mathcal{U}} A$$

qui contient A comme sous-ensemble.

Si les A_w sont munis d'une structure du premier ordre (groupes, ensembles ordonnés, anneaux...), il en est de même de l'ultraproduit.

Ultraproduits : mode d'emploi

Point clé : les ultraproduits préservent les **propriétés du premier ordre**. Par exemple, pour une famille (A_w) d'anneaux commutatifs unitaires, d'ultraproduit noté A^* :

$$A^* \text{ est un corps} \iff \{w \in W \mid A_w \text{ est un corps}\} \in \mathcal{U}$$

car « A est un corps » équivaut à la formule

$$(1 \neq 0) \text{ et } \left(\forall x \left((x = 0) \text{ ou } (\exists y, xy = 1) \right) \right)$$

dans laquelle **tous les quantificateurs portent sur les éléments de A** .

Ultraproduits : mode d'emploi

Un peu plus élaboré : « **A est un corps de caractéristique nulle** » équivaut à la conjonction des propriétés suivantes :

- « A est un corps » (cf. ci-dessus) ;
- pour chaque entier $n \geq 1$, la propriété P_n : « $n \cdot 1_K \neq 0$ ».

Il est clair que chaque P_n est du premier ordre, donc la propriété « corps de caractéristique nulle » l'est aussi (et est conservée par ultraproducts).

Ultraproduits : mode d'emploi

Par exemple, les propriétés d'anneaux suivantes sont du premier ordre, donc conservées par ultraproduit :

- intègre ;
- réduit ;
- corps de caractéristique p (premier donné) ;
- anneau de valuation ;
- corps algébriquement clos ;
- anneau local hensélien ;
- corps de caractéristique nulle.

Les 4 premières sont même définissables par une seule formule.

Ultraproduits : mode d'emploi

Les propriétés suivantes ne sont pas du premier ordre :

- corps de caractéristique positive ;
- anneau noethérien ;
- anneau de valuation discrète.

Preuve du P.H.A. (esquisse)

R : anneau de valuation hensélien, \widehat{K}/K séparable ;

X : R -schéma de présentation finie.

On veut montrer :

si $X(R_\alpha) \neq \emptyset$ pour tout $\alpha \in \Gamma_+$, alors $X(R) \neq \emptyset$.

On suppose donc que $\prod_{\alpha \in \Gamma_+} X(R_\alpha) \neq \emptyset$.

Ceci équivaut à $X\left(\prod_{\alpha \in \Gamma_+} R_\alpha\right) \neq \emptyset$ (les R_α sont locaux).

Si l'on fixe un ultrafiltre \mathcal{U} sur $W := \Gamma_+$, cette condition entraîne

$$X\left(\operatorname{ulim}_{\mathcal{U}, \alpha} R_\alpha\right) \neq \emptyset.$$

$$X \left(\operatorname{ulim}_{\mathcal{U}, \alpha} R_\alpha \right) \neq \emptyset.$$

L'anneau $\operatorname{ulim}_{\mathcal{U}, \alpha} R_\alpha$ s'identifie à R^*/I_δ , où :

- $R^* = \operatorname{upw}_{\mathcal{U}} R$ (anneau de valuation hensélien contenant R , de groupe $\Gamma^* := \operatorname{upw}_{\mathcal{U}} \Gamma$);
- $\delta \in \Gamma_+^*$ est l'élément « diagonal » $\operatorname{ulim}_{\mathcal{U}, \alpha} \alpha$ (classe de la famille $(\alpha)_{\alpha \in \Gamma_+}$).

Choisissons \mathcal{U} contenant tous les ensembles $[\gamma, +\infty[\subset \Gamma_+$.

Alors δ est « infiniment grand » (plus grand que Γ). Donc $I_\delta \subset P := \{x \in R^* \mid v(x) > \Gamma\}$; ce P est un idéal premier de R^* .

On a donc les implications :

$$\forall \alpha, X(R_\alpha) \neq \emptyset \quad \xRightarrow{\text{(d\u00e9j\u00e0 vu)}} \quad X(R^*/I_\delta) \neq \emptyset \quad \xRightarrow{I_\delta \subset P} \quad X(R^*/P) \neq \emptyset$$

Posons $\bar{R} := R^*/P$. C'est un **anneau de valuation hens\u00e9lien contenant R** (son groupe de valuation est l'enveloppe convexe de Γ dans Γ^*).

On a une suite de morphismes $R \hookrightarrow R^* \twoheadrightarrow \bar{R}$ induisant un diagramme d'ensembles

$$X(R) \longrightarrow X(R^*) \longrightarrow X(\bar{R}) \neq \emptyset.$$

On v\u00e9rifie (parce que R est local) que $X(R^*) = \underset{\mathcal{U}}{\text{upw}} X(R)$. En particulier :

$$X(R) \neq \emptyset \iff X(R^*) \neq \emptyset.$$

Il suffit donc de montrer que « $X(\bar{R}) \neq \emptyset$ » implique « $X(R^*) \neq \emptyset$ ». En fait :

Th\u00e9or\u00e8me 6 (rel\u00e8vement)

Sous les hypoth\u00e8ses du th\u00e9or\u00e8me 1, et avec les notations ci-dessus, l'application $X(R^) \rightarrow X(\bar{R})$ est surjective.*

Théorème 6 (relèvement)

Sous les hypothèses du théorème 1, et avec les notations ci-dessus, l'application $X(R^) \rightarrow X(\overline{R})$ est surjective.*

La démonstration utilise la propriété de Hensel pour R^* , et la séparabilité de \widehat{K}/K . Cette dernière sert à montrer que $\text{Frac}(\overline{R})$ est séparable sur K .