Approximation forte et topologie des variétés sur un corps valué

Laurent Moret-Bailly

IRMAR, Université de Rennes 1

Conférence en l'honneur de Gérard Laumon
Orsay, 25 juin 2012

Une partie des résultats de cet exposé fait l'objet d'un travail en cours avec Philippe Gille (CNRS)

Notations (pour tout l'exposé)

- R : un anneau de valuation (le plus souvent hensélien)
- $K = \mathrm{Frac}\,(R)$
- Γ : le groupe de la valuation, $\Gamma_+ := \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha \geq 0\}$
- $v : K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$: la valuation
- Pour $\alpha \in \Gamma_+$ on pose :
  - $I_\alpha := \{x \in R \mid v(x) \geq \alpha\}$ (idéal principal de R)
  - $R_\alpha := R/I_\alpha$
- $\widehat{R} := \varprojlim_{\alpha} R_\alpha$, $\widehat{K} := \mathit{Frac}\,(\widehat{R})$ (les complétés de R et de K).

Notations (pour tout l'exposé)

- R : un anneau de valuation (le plus souvent hensélien)
- $K = \mathrm{Frac}\,(R)$
- Γ : le groupe de la valuation, $\Gamma_+ := \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha \geq 0\}$
- $v : K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$: la valuation
- Pour $\alpha \in \Gamma_+$ on pose :
  - $I_\alpha := \{x \in R \mid v(x) \geq \alpha\}$ (idéal principal de R)
  - $R_\alpha := R/I_\alpha$
- $\widehat{R} := \varprojlim_\alpha R_\alpha$, $\widehat{K} := Frac\,(\widehat{R})$ (les complétés de R et de K).

Notations (pour tout l'exposé)

- R : un anneau de valuation (le plus souvent hensélien)
- $K = \mathrm{Frac}\,(R)$
- Γ : le groupe de la valuation, $\Gamma_+ := \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha \geq 0\}$
- $v : K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$: la valuation
- Pour $\alpha \in \Gamma_+$ on pose :
  - $I_\alpha := \{x \in R \mid v(x) \geq \alpha\}$ (idéal principal de R)
  - $R_\alpha := R/I_\alpha$
- $\widehat{R} := \varprojlim_\alpha R_\alpha$, $\widehat{K} := \mathit{Frac}\,(\widehat{R})$ (les complétés de R et de K).

Notations (pour tout l'exposé)

- R : un anneau de valuation (le plus souvent hensélien)
- $K = \mathrm{Frac}(R)$
- Γ : le groupe de la valuation, $\Gamma_+ := \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha \geq 0\}$
- $v : K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$: la valuation
- Pour $\alpha \in \Gamma_+$ on pose :
  - $I_\alpha := \{x \in R \mid v(x) \geq \alpha\}$ (idéal principal de R)
  - $R_\alpha := R/I_\alpha$
- $\widehat{R} := \varprojlim_\alpha R_\alpha$, $\widehat{K} := \mathit{Frac}(\widehat{R})$ (les complétés de R et de K).

Notations (pour tout l'exposé)

- R : un anneau de valuation (le plus souvent hensélien)
- $K = \mathrm{Frac}\,(R)$
- Γ : le groupe de la valuation, $\Gamma_+ := \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha \geq 0\}$
- $v : K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$: la valuation
- Pour $\alpha \in \Gamma_+$ on pose :
  - $I_\alpha := \{x \in R \mid v(x) \geq \alpha\}$ (idéal principal de R)
  - $R_\alpha := R/I_\alpha$
- $\widehat{R} := \varprojlim_\alpha R_\alpha$, $\widehat{K} := Frac\,(\widehat{R})$ (les complétés de R et de K).

Notations (pour tout l'exposé)

- R : un anneau de valuation (le plus souvent hensélien)
- $K = \mathrm{Frac}\,(R)$
- Γ : le groupe de la valuation, $\Gamma_+ := \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha \geq 0\}$
- $v : K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$: la valuation
- Pour $\alpha \in \Gamma_+$ on pose :
  - $I_\alpha := \{x \in R \mid v(x) \geq \alpha\}$ (idéal principal de R)
  - $R_\alpha := R/I_\alpha$
- $\widehat{R} := \varprojlim_{\alpha} R_\alpha$, $\widehat{K} := \mathit{Frac}\,(\widehat{R})$ (les complétés de R et de K).

Notations (pour tout l'exposé)

- R : un anneau de valuation (le plus souvent hensélien)
- $K = \mathrm{Frac}\,(R)$
- Γ : le groupe de la valuation, $\Gamma_+ := \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha \geq 0\}$
- $v : K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$: la valuation
- Pour $\alpha \in \Gamma_+$ on pose :
  - $I_\alpha := \{x \in R \mid v(x) \geq \alpha\}$ (idéal principal de R)
  - $R_\alpha := R/I_\alpha$
- $\widehat{R} := \varprojlim_\alpha R_\alpha$, $\widehat{K} := \mathit{Frac}\,(\widehat{R})$ (les complétés de R et de K).

Notations (pour tout l'exposé)

- R : un anneau de valuation (le plus souvent hensélien)
- $K = \mathrm{Frac}\,(R)$
- Γ : le groupe de la valuation, $\Gamma_+ := \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha \geq 0\}$
- $v : K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$: la valuation
- Pour $\alpha \in \Gamma_+$ on pose :
  - $I_\alpha := \{x \in R \mid v(x) \geq \alpha\}$ (idéal principal de R)
  - $R_\alpha := R/I_\alpha$
- $\widehat{R} := \varprojlim_{\alpha} R_\alpha$, $\widehat{K} := \mathit{Frac}\,(\widehat{R})$ (les complétés de R et de K).

La topologie de la valuation

Le corps valué K est un corps topologique ; les idéaux I_α de R ($\alpha \in \Gamma_+$) forment une base de voisinages de 0.

Par suite, pour tout K-schéma X de type fini, on a une topologie naturelle sur $X(K)$: une base d'ouverts est formée des ensembles

$$\{x \in U(K) \mid v(f_i(x)) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$$

pour $U \subset X$ ouvert affine et $f_i \in H^0(U, \mathscr{O}_U)$.

Autre base d'ouverts (équivalente) : les ensembles

$$\mathrm{Im}\,(\mathscr{X}(R) \to X(K))$$

où $\mathscr{X}$ parcourt les R-schémas de présentation finie à fibre générique X.

Un K-morphisme $f : X \to Y$ induit une application continue

$$f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K).$$

La topologie de la valuation

Le corps valué K est un corps topologique ; les idéaux I_α de R ($\alpha \in \Gamma_+$) forment une base de voisinages de 0.

Par suite, pour tout K-schéma X de type fini, on a une topologie naturelle sur $X(K)$: une base d'ouverts est formée des ensembles

$$\{x \in U(K) \mid v(f_i(x)) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$$

pour $U \subset X$ ouvert affine et $f_i \in H^0(U, \mathscr{O}_U)$.

Autre base d'ouverts (équivalente) : les ensembles

$$\operatorname{Im}(\mathscr{X}(R) \to X(K))$$

où $\mathscr{X}$ parcourt les R-schémas de présentation finie à fibre générique X.

Un K-morphisme $f : X \to Y$ induit une application continue

$$f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K).$$

La topologie de la valuation

Le corps valué K est un corps topologique ; les idéaux I_α de R ($\alpha \in \Gamma_+$) forment une base de voisinages de 0.

Par suite, pour tout K-schéma X de type fini, on a une topologie naturelle sur $X(K)$: une base d'ouverts est formée des ensembles

$$\{x \in U(K) \mid v(f_i(x)) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$$

pour $U \subset X$ ouvert affine et $f_i \in H^0(U, \mathscr{O}_U)$.

Autre base d'ouverts (équivalente) : les ensembles

$$\operatorname{Im}(\mathscr{X}(R) \to X(K))$$

où $\mathscr{X}$ parcourt les R-schémas de présentation finie à fibre générique X.

Un K-morphisme $f : X \to Y$ induit une application continue

$$f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K).$$

La topologie de la valuation

Le corps valué K est un corps topologique ; les idéaux I_α de R ($\alpha \in \Gamma_+$) forment une base de voisinages de 0.

Par suite, pour tout K-schéma X de type fini, on a une topologie naturelle sur $X(K)$: une base d'ouverts est formée des ensembles

$$\{x \in U(K) \mid v(f_i(x)) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$$

pour $U \subset X$ ouvert affine et $f_i \in H^0(U, \mathscr{O}_U)$.

Autre base d'ouverts (équivalente) : les ensembles

$$\mathrm{Im}\,(\mathscr{X}(R) \to X(K))$$

où $\mathscr{X}$ parcourt les R-schémas de présentation finie à fibre générique X.

Un K-morphisme $f : X \to Y$ induit une application continue

$$f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K).$$

La topologie de la valuation : le cas des R-schémas

Si $\mathscr{X}$ est un R-schéma séparé de présentation finie, alors $\mathscr{X}(R)$ s'identifie par l'injection

$$\mathscr{X}(R) \hookrightarrow \mathscr{X}(K) = \mathscr{X}_K(K)$$

à un ouvert fermé de $\mathscr{X}(K)$. (Pour « fermé », on utilise le théorème de compactification de Nagata).

La topologie de la valuation : le cas des R-schémas

Si $\mathscr{X}$ est un R-schéma séparé de présentation finie, alors $\mathscr{X}(R)$ s'identifie par l'injection

$$\mathscr{X}(R) \hookrightarrow \mathscr{X}(K) = \mathscr{X}_K(K)$$

à un ouvert fermé de $\mathscr{X}(K)$. (Pour « fermé », on utilise le théorème de compactification de Nagata).

La topologie de la valuation : le cas des R-schémas

Si $\mathscr{X}$ est un R-schéma séparé de présentation finie, alors $\mathscr{X}(R)$ s'identifie par l'injection

$$\mathscr{X}(R) \hookrightarrow \mathscr{X}(K) = \mathscr{X}_K(K)$$

à un ouvert fermé de $\mathscr{X}(K)$. (Pour « fermé », on utilise le théorème de compactification de Nagata).

Remarque : on peut définir la topologie de $\mathscr{X}(R)$ directement, même si $\mathscr{X}$ n'est plus nécessairement séparé.

La topologie de la valuation : le cas des R-schémas

Si $\mathscr{X}$ est un R-schéma séparé de présentation finie, alors $\mathscr{X}(R)$ s'identifie par l'injection

$$\mathscr{X}(R) \hookrightarrow \mathscr{X}(K) = \mathscr{X}_K(K)$$

à un ouvert fermé de $\mathscr{X}(K)$. (Pour « fermé », on utilise le théorème de compactification de Nagata).

Remarque : on peut définir la topologie de $\mathscr{X}(R)$ directement, même si $\mathscr{X}$ n'est plus nécessairement séparé.

L'espace $\mathscr{X}(R)$ est alors toujours séparé.

Problème (très) général :

étude des propriétés topologiques des espaces $X(K)$
et des applications continues $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$.

Par exemple :

f_{top} ouverte ? fermée ?

$f_{\mathrm{top}}(X(K)) \subset Y(K)$ ouvert ? fermé ? constructible ?

Problème (très) général :

étude des propriétés topologiques des espaces $X(K)$
et des applications continues $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$.

Par exemple :

f_{top} ouverte ? fermée ?

$f_{\text{top}}(X(K)) \subset Y(K)$ ouvert ? fermé ? constructible ?

Problème (très) général :

étude des propriétés topologiques des espaces $X(K)$ et des applications continues $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$.

Par exemple :

f_{top} ouverte ? fermée ?

$f_{\text{top}}(X(K)) \subset Y(K)$ ouvert ? fermé ? constructible ?

Problème (très) général :

étude des propriétés topologiques des espaces $X(K)$
et des applications continues $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$.

Par exemple :

f_{top} ouverte ? fermée ?

$f_{\text{top}}(X(K)) \subset Y(K)$ ouvert ? fermé ? constructible ?

Premières réponses :

Proposition 1

On suppose K hensélien.
Si $f : X \to Y$ est lisse, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.
Si f est étale, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est un homéomorphisme local.

Proposition 2

On suppose K algébriquement fermé dans $\widehat{K}$.
Si $f : X \to Y$ est fini, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est fermée.

Proposition 3 (LMB)

On suppose K algébriquement clos. Conditions équivalentes (pour $f : X \to Y$ donné) :

1. *f est universellement ouvert ;*
2. *$f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.*

Premières réponses :

Proposition 1

On suppose K hensélien.
Si $f : X \to Y$ est lisse, alors $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.
Si f est étale, alors $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est un homéomorphisme local.

Proposition 2

On suppose K algébriquement fermé dans $\widehat{K}$.
Si $f : X \to Y$ est fini, alors $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est fermée.

Proposition 3 (LMB)

On suppose K algébriquement clos. Conditions équivalentes (pour $f : X \to Y$ donné) :

1. *f est universellement ouvert ;*
2. *$f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.*

Premières réponses :

Proposition 1

On suppose K hensélien.
Si $f : X \to Y$ est lisse, alors $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.
Si f est étale, alors $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est un homéomorphisme local.

Proposition 2

On suppose K algébriquement fermé dans $\widehat{K}$.
Si $f : X \to Y$ est fini, alors $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est fermée.

Proposition 3 (LMB)

On suppose K algébriquement clos. Conditions équivalentes (pour $f : X \to Y$ donné) :

1. *f est universellement ouvert ;*
2. *$f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.*

Premières réponses :

Proposition 1

On suppose K hensélien.
Si $f : X \to Y$ est lisse, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.
Si f est étale, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est un homéomorphisme local.

Proposition 2

On suppose K algébriquement fermé dans $\widehat{K}$.
Si $f : X \to Y$ est fini, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est fermée.

Proposition 3 (LMB)

On suppose K algébriquement clos. Conditions équivalentes (pour $f : X \to Y$ donné) :

1. *f est universellement ouvert ;*
2. *$f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.*

Premières réponses :

Proposition 1

On suppose K hensélien.
Si $f : X \to Y$ est lisse, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.
Si f est étale, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est un homéomorphisme local.

Proposition 2

On suppose K algébriquement fermé dans $\widehat{K}$.
Si $f : X \to Y$ est fini, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est fermée.

Proposition 3 (LMB)

On suppose K algébriquement clos. Conditions équivalentes (pour $f : X \to Y$ donné) :

1. *f est universellement ouvert ;*
2. *$f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.*

Premières réponses :

Proposition 1

On suppose K hensélien.
Si $f : X \to Y$ est lisse, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.
Si f est étale, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est un homéomorphisme local.

Proposition 2

On suppose K algébriquement fermé dans $\widehat{K}$.
Si $f : X \to Y$ est fini, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est fermée.

Proposition 3 (LMB)

On suppose K algébriquement clos. Conditions équivalentes (pour $f : X \to Y$ donné) :

1. *f est universellement ouvert ;*
2. *$f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.*

Premières réponses :

Proposition 1

On suppose K hensélien.
Si $f : X \to Y$ est lisse, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.
Si f est étale, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est un homéomorphisme local.

Proposition 2

On suppose K algébriquement fermé dans $\widehat{K}$.
Si $f : X \to Y$ est fini, alors $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est fermée.

Proposition 3 (LMB)

On suppose K algébriquement clos. Conditions équivalentes (pour $f : X \to Y$ donné) :

1. *f est universellement ouvert ;*
2. *$f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est ouverte.*

Suite de notre programme

- présentation d'outils plus spécialisés :
  - le « principe de Hasse approché » ;
  - un théorème de constructibilité (Bernstein) ;
  - un théorème de compactification (Gabber).

- application à des morphismes particuliers (torseurs).

Suite de notre programme

- présentation d'outils plus spécialisés :
  - le « principe de Hasse approché » ;
  - un théorème de constructibilité (Bernstein) ;
  - un théorème de compactification (Gabber).

- application à des morphismes particuliers (torseurs).

Suite de notre programme

- présentation d'outils plus spécialisés :
  - le « principe de Hasse approché » ;
  - un théorème de constructibilité (Bernstein) ;
  - un théorème de compactification (Gabber).
- application à des morphismes particuliers (torseurs).

Le « principe de Hasse approché »

Théorème 1

On suppose R hensélien et $\widehat{K}$ séparable sur K.
Pour tout R-schéma X de présentation finie, on a l'équivalence :

$$X(R) \neq \emptyset \iff \forall \alpha \in \Gamma,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset.$$

Résulte du « théorème d'approximation fort » :

- Greenberg (1966) si $\Gamma = \mathbb{Z}$,
- LMB (2011) en général (voir fin de l'exposé).

Le « principe de Hasse approché »

Théorème 1

On suppose R *hensélien et* $\widehat{K}$ *séparable sur* K*.*
Pour tout R*-schéma* X *de présentation finie, on a l'équivalence :*

$$X(R) \neq \emptyset \iff \forall \alpha \in \Gamma,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset.$$

Résulte du « théorème d'approximation fort » :

- Greenberg (1966) si $\Gamma = \mathbb{Z}$,
- LMB (2011) en général (voir fin de l'exposé).

Le « principe de Hasse approché »

Théorème 1

On suppose R hensélien et $\widehat{K}$ séparable sur K.
Pour tout R-schéma X de présentation finie, on a l'équivalence :

$$X(R) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \alpha \in \Gamma,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset.$$

Résulte du « théorème d'approximation fort » :

- Greenberg (1966) si $\Gamma = \mathbb{Z}$,
- LMB (2011) en général (voir fin de l'exposé).

Le « principe de Hasse approché »

Théorème 1

On suppose R hensélien et $\widehat{K}$ séparable sur K.
Pour tout R-schéma X de présentation finie, on a l'équivalence :

$$X(R) \neq \emptyset \iff \forall \alpha \in \Gamma,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset.$$

Résulte du « théorème d'approximation fort » :

- Greenberg (1966) si $\Gamma = \mathbb{Z}$, i.e. si R est un Avdex
- LMB (2011) en général (voir fin de l'exposé).

Le « principe de Hasse approché »

Théorème 1

On suppose R hensélien et $\widehat{K}$ séparable sur K.
Pour tout R-schéma X de présentation finie, on a l'équivalence :

$$X(R) \neq \emptyset \iff \forall \alpha \in \Gamma,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset.$$

Résulte du « théorème d'approximation fort » :

- Greenberg (1966) si $\Gamma = \mathbb{Z}$, i.e. si R est un Avdex
- LMB (2011) en général (voir fin de l'exposé).

Le « principe de Hasse approché »

Théorème 1

On suppose R hensélien et $\widehat{K}$ séparable sur K.
Pour tout R-schéma X de présentation finie, on a l'équivalence :

$$X(R) \neq \emptyset \iff \forall \alpha \in \Gamma,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset.$$

Résulte du « théorème d'approximation fort » :

- Greenberg (1966) si $\Gamma = \mathbb{Z}$, i.e. si R est un Avdex (anneau de valuation discrète d'excellence) ;
- LMB (2011) en général (voir fin de l'exposé).

Le « principe de Hasse approché »

Théorème 1

On suppose R hensélien et $\widehat{K}$ séparable sur K.
Pour tout R-schéma X de présentation finie, on a l'équivalence :

$$X(R) \neq \emptyset \iff \forall \alpha \in \Gamma,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset.$$

Résulte du « théorème d'approximation fort » :

- Greenberg (1966) si $\Gamma = \mathbb{Z}$, i.e. si R est un Avdex (anneau de valuation discrète d'excellence) ;
- LMB (2011) en général (voir fin de l'exposé).

Interprétation topologique du principe de Hasse approché

Proposition 4

On suppose R hensélien et $\widehat{K}/K$ séparable.
Si $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un morphisme de R-schémas de présentation finie, l'image $f(\mathscr{X}(R)) \subset \mathscr{Y}(R)$ est fermée pour la topologie de la valuation.

Cet énoncé est équivalent au P.H.A. (exercice).

Si $\mathscr{Y}$ est séparé, on en déduit que l'image de $\mathscr{X}(R)$ est aussi fermée dans $\mathscr{Y}(K)$ (puisque $\mathscr{Y}(R)$ est fermé dans $\mathscr{Y}(K)$).

Interprétation topologique du principe de Hasse approché

Proposition 4

On suppose R hensélien et $\widehat{K}/K$ séparable.
Si $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un morphisme de R-schémas de présentation finie, l'image $f(\mathscr{X}(R)) \subset \mathscr{Y}(R)$ est fermée pour la topologie de la valuation.

Cet énoncé est équivalent au P.H.A. (exercice).

Si $\mathscr{Y}$ est séparé, on en déduit que l'image de $\mathscr{X}(R)$ est aussi fermée dans $\mathscr{Y}(K)$ (puisque $\mathscr{Y}(R)$ est fermé dans $\mathscr{Y}(K)$).

Interprétation topologique du principe de Hasse approché

Proposition 4

On suppose R hensélien et $\widehat{K}/K$ séparable.
Si $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un morphisme de R-schémas de présentation finie, l'image $f(\mathscr{X}(R)) \subset \mathscr{Y}(R)$ est fermée pour la topologie de la valuation.

Cet énoncé est équivalent au P.H.A. (exercice).

Si $\mathscr{Y}$ est séparé, on en déduit que l'image de $\mathscr{X}(R)$ est aussi fermée dans $\mathscr{Y}(K)$ (puisque $\mathscr{Y}(R)$ est fermé dans $\mathscr{Y}(K)$).

Corollaire 1

On suppose R hensélien et $\widehat{K}/K$ séparable. Soit X un K-schéma de type fini.

Alors X admet une base $\mathscr{V}$ d'ouverts ayant la propriété suivante :

pour tout K-morphisme $f : X \to Y$, où Y est séparé de type fini, et tout $V \in \mathscr{V}$, l'image $f_{\mathrm{top}}(V)$ est fermée dans $Y(K)$.

(Prendre pour $\mathscr{V}$ l'ensemble des $\mathscr{X}(R)$, où $\mathscr{X}$ parcourt les R-modèles de X.)

Remarque : c'est trivial si K est un corps local (prendre pour $\mathscr{V}$ l'ensemble des ouverts compacts).

Corollaire 1

On suppose R hensélien et $\widehat{K}/K$ séparable. Soit X un K-schéma de type fini.

Alors X admet une base $\mathscr{V}$ d'ouverts ayant la propriété suivante :

pour tout K-morphisme $f : X \to Y$, où Y est séparé de type fini, et tout $V \in \mathscr{V}$, l'image $f_{\mathrm{top}}(V)$ est fermée dans $Y(K)$.

(Prendre pour $\mathscr{V}$ l'ensemble des $\mathscr{X}(R)$, où $\mathscr{X}$ parcourt les R-modèles de X.)

Remarque : c'est trivial si K est un corps local (prendre pour $\mathscr{V}$ l'ensemble des ouverts compacts).

Corollaire 1

On suppose R hensélien et $\widehat{K}/K$ séparable. Soit X un K-schéma de type fini.

Alors X admet une base $\mathscr{V}$ d'ouverts ayant la propriété suivante :

pour tout K-morphisme $f : X \to Y$, où Y est séparé de type fini, et tout $V \in \mathscr{V}$, l'image $f_{\mathrm{top}}(V)$ est fermée dans $Y(K)$.

(Prendre pour $\mathscr{V}$ l'ensemble des $\mathscr{X}(R)$, où $\mathscr{X}$ parcourt les R-modèles de X.)

Remarque : c'est trivial si K est un corps local (prendre pour $\mathscr{V}$ l'ensemble des ouverts compacts).

Corollaire 2

On suppose R hensélien et $\widehat{K}/K$ séparable.
Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de K-schémas de type fini. Alors $f(X(K))$ est fermé dans $Y(K)$.

Remarque : si K est un corps local, $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est propre.

Mais en général, f_{top} n'est pas fermée.

Corollaire 2

On suppose R hensélien et $\widehat{K}/K$ séparable.
Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de K-schémas de type fini. Alors $f(X(K))$ est fermé dans $Y(K)$.

Remarque : si K est un corps local, $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est propre.

Mais en général, f_{top} n'est pas fermée.

Corollaire 2

On suppose R hensélien et $\widehat{K}/K$ séparable.
Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de K-schémas de type fini. Alors $f(X(K))$ est fermé dans $Y(K)$.

Remarque : si K est un corps local, $f_{\text{top}} : X(K) \to Y(K)$ est propre.

Mais en général, f_{top} n'est pas fermée.

Le théorème de constructibilité

Théorème 2 (Bernstein, 1976)

Soit K un corps local, et soit $f : X \to Y$ un morphisme de K-variétés. Alors $f_{\mathrm{top}}(X(K))$ est constructible dans $Y(K)$.

Remarques :

- c'est immédiat en caractéristique nulle (et plus généralement pour K hensélien de caractéristique nulle) : on peut stratifier X et Y de telle sorte que f induise des morphismes lisses entre les strates.
- Généralisation (Gille-LMB) : K hensélien de caractéristique $p > 0$, $[K : K^p] < +\infty$, condition supplémentaire sur l'extension $K^{1/p}/K$.

Le théorème de constructibilité

Théorème 2 (Bernstein, 1976)

Soit K un corps local, et soit $f : X \to Y$ un morphisme de K-variétés. Alors $f_{\mathrm{top}}(X(K))$ est constructible dans $Y(K)$.

Remarques :

- c'est immédiat en caractéristique nulle (et plus généralement pour K hensélien de caractéristique nulle) : on peut stratifier X et Y de telle sorte que f induise des morphismes lisses entre les strates.
- Généralisation (Gille-LMB) : K hensélien de caractéristique $p > 0$, $[K : K^p] < +\infty$, condition supplémentaire sur l'extension $K^{1/p}/K$.

Le théorème de constructibilité

Théorème 2 (Bernstein, 1976)

Soit K un corps local, et soit $f : X \to Y$ un morphisme de K-variétés. Alors $f_{\text{top}}(X(K))$ est constructible dans $Y(K)$.

Remarques :

- c'est immédiat en caractéristique nulle (et plus généralement pour K hensélien de caractéristique nulle) : on peut stratifier X et Y de telle sorte que f induise des morphismes lisses entre les strates.
- Généralisation (Gille-LMB) : K hensélien de caractéristique $p > 0$, $[K : K^p] < +\infty$, condition supplémentaire sur l'extension $K^{1/p}/K$.

Espaces homogènes

Données :

- un K-groupe algébrique G (= un K-schéma en groupes de type fini) ;
- un sous-groupe algébrique H de G.

On note X l'espace homogène G/H. On s'intéresse au morphisme canonique

$$f : G \twoheadrightarrow X = G/H.$$

On note $x_0 = f(e) \in X(K)$ la classe neutre.

En passant aux points rationnels, l'application

$$f_{\text{top}} : G(K) \longrightarrow X(K)$$

induit une bijection continue

$$G(K)/H(K) \longrightarrow G(K).x_0 \subset X(K).$$

Espaces homogènes

Données :

- un K-groupe algébrique G (= un K-schéma en groupes de type fini) ;
- un sous-groupe algébrique H de G.

On note X l'espace homogène G/H. On s'intéresse au morphisme canonique

$$f : G \twoheadrightarrow X = G/H.$$

On note $x_0 = f(e) \in X(K)$ la classe neutre.

En passant aux points rationnels, l'application

$$f_{\text{top}} : G(K) \longrightarrow X(K)$$

induit une bijection continue

$$G(K)/H(K) \longrightarrow G(K).x_0 \subset X(K).$$

Espaces homogènes

Données :

- un K-groupe algébrique G (= un K-schéma en groupes de type fini) ;
- un sous-groupe algébrique H de G.

On note X l'espace homogène G/H. On s'intéresse au morphisme canonique

$$f : G \twoheadrightarrow X = G/H.$$

On note $x_0 = f(e) \in X(K)$ la classe neutre.

En passant aux points rationnels, l'application

$$f_{\mathrm{top}} : G(K) \longrightarrow X(K)$$

induit une bijection continue

$$G(K)/H(K) \longrightarrow G(K).x_0 \subset X(K).$$

Espaces homogènes

Données :

- un K-groupe algébrique G (= un K-schéma en groupes de type fini) ;
- un sous-groupe algébrique H de G.

On note X l'espace homogène G/H. On s'intéresse au morphisme canonique

$$f : G \twoheadrightarrow X = G/H.$$

On note $x_0 = f(e) \in X(K)$ la classe neutre.

En passant aux points rationnels, l'application

$$f_{\mathrm{top}} : G(K) \longrightarrow X(K)$$

induit une bijection continue

$$G(K)/H(K) \longrightarrow G(K).x_0 \subset X(K).$$

Espaces homogènes : points rationnels

$$G(K)/H(K) \longleftrightarrow G(K).x_0 \subset X(K)$$

- L'orbite $G(K).x_0$ est-elle localement fermée (voire fermée) dans $X(K)$?
- La bijection ci-dessus est-elle un homéomorphisme ?

La réponse est oui (pour les deux questions)

1. si H est lisse (exemple : car $K = 0$) et K hensélien ; dans ce cas, l'orbite $G(K).x_0$ est ouverte et fermée ;
2. $K = \mathbb{F}_q((t))$ (Bernstein-Zelevinsky, 1976).

Le deuxième cas se déduit du théorème de constructibilité et d'un argument classique ($G(K)$ est localement compact à base dénombrable, et l'orbite est un espace de Baire).

Espaces homogènes : points rationnels

$$G(K)/H(K) \longleftrightarrow G(K).x_0 \subset X(K)$$

- L'orbite $G(K).x_0$ est-elle localement fermée (voire fermée) dans $X(K)$?
- La bijection ci-dessus est-elle un homéomorphisme ?

La réponse est oui (pour les deux questions)

1. si H est lisse (exemple : car $K = 0$) et K hensélien ; dans ce cas, l'orbite $G(K).x_0$ est ouverte et fermée ;
2. $K = \mathbb{F}_q((t))$ (Bernstein-Zelevinsky, 1976).

Le deuxième cas se déduit du théorème de constructibilité et d'un argument classique ($G(K)$ est localement compact à base dénombrable, et l'orbite est un espace de Baire).

Espaces homogènes : points rationnels

$$G(K)/H(K) \longleftrightarrow G(K).x_0 \subset X(K)$$

- L'orbite $G(K).x_0$ est-elle localement fermée (voire fermée) dans $X(K)$?
- La bijection ci-dessus est-elle un homéomorphisme ?

La réponse est oui (pour les deux questions)

1. si H est lisse (exemple : car $K = 0$) et K hensélien ; dans ce cas, l'orbite $G(K).x_0$ est ouverte et fermée ;
2. $K = \mathbb{F}_q((t))$ (Bernstein-Zelevinsky, 1976).

Le deuxième cas se déduit du théorème de constructibilité et d'un argument classique ($G(K)$ est localement compact à base dénombrable, et l'orbite est un espace de Baire).

Espaces homogènes : points rationnels

$$G(K)/H(K) \longleftrightarrow G(K).x_0 \subset X(K)$$

- L'orbite $G(K).x_0$ est-elle localement fermée (voire fermée) dans $X(K)$?
- La bijection ci-dessus est-elle un homéomorphisme ?

La réponse est oui (pour les deux questions)

1. si H est lisse (exemple : car $K = 0$) et K hensélien ; dans ce cas, l'orbite $G(K).x_0$ est ouverte et fermée ;
2. $K = \mathbb{F}_q((t))$ (Bernstein-Zelevinsky, 1976).

Le deuxième cas se déduit du théorème de constructibilité et d'un argument classique ($G(K)$ est localement compact à base dénombrable, et l'orbite est un espace de Baire).

Espaces homogènes : points rationnels

$$G(K)/H(K) \longleftrightarrow G(K).x_0 \subset X(K)$$

- L'orbite $G(K).x_0$ est-elle localement fermée (voire fermée) dans $X(K)$?
- La bijection ci-dessus est-elle un homéomorphisme ?

La réponse est oui (pour les deux questions)

1. si H est lisse (exemple : car $K = 0$) et K hensélien ; dans ce cas, l'orbite $G(K).x_0$ est ouverte et fermée ;
2. $K = \mathbb{F}_q((t))$ (Bernstein-Zelevinsky, 1976).

Le deuxième cas se déduit du théorème de constructibilité et d'un argument classique ($G(K)$ est localement compact à base dénombrable, et l'orbite est un espace de Baire).

Généralisation

Théorème 3 (Gille-LMB)

On suppose que K est un corps valué complet de rang 1 et de caractéristique $p > 0$, et que :

- $[K : K^p] < +\infty$,
- *l'espace K est à base dénombrable (c.à.d. séparable).*

Alors, pour G, H, X, x_0 comme précédemment, $G(K).x_0$ est localement fermé dans $X(K)$ et la bijection naturelle

$$G(K)/H(K) \longrightarrow G(K).x_0$$

est un homéomorphisme.

C'est une conséquence de la généralisation du théorème de constructibilité, avec le même argument que précédemment ; la compacité locale est remplacée par le corollaire 1 (existence d'une base d'ouverts d'images fermées).

Généralisation

Théorème 3 (Gille-LMB)

On suppose que K est un corps valué complet de rang 1 et de caractéristique $p > 0$, et que :

- $[K : K^p] < +\infty$,
- *l'espace K est à base dénombrable (c.à.d. séparable).*

Alors, pour G, H, X, x_0 comme précédemment, $G(K).x_0$ est localement fermé dans $X(K)$ et la bijection naturelle

$$G(K)/H(K) \longrightarrow G(K).x_0$$

est un homéomorphisme.

C'est une conséquence de la généralisation du théorème de constructibilité, avec le même argument que précédemment ; la compacité locale est remplacée par le corollaire 1 (existence d'une base d'ouverts d'images fermées).

Utilisation d'une compactification

Soit G un K-groupe algébrique. Il existe un plus grand sous-K-schéma (en groupes) lisse G_0 de G (l'adhérence de Zariski de l'ensemble des points de G à corps résiduel séparable sur K).

Théorème 4 (Gabber)

Le quotient $Q := G/G_0$ admet une compactification projective G-équivariante $\overline{Q}$ telle que $\overline{Q} - Q$ n'ait aucun point séparable sur K.

On en déduit le théorème suivant :

Utilisation d'une compactification

Soit G un K-groupe algébrique. Il existe un plus grand sous-K-schéma (en groupes) lisse G_0 de G (l'adhérence de Zariski de l'ensemble des points de G à corps résiduel séparable sur K).

Théorème 4 (Gabber)

Le quotient $Q := G/G_0$ admet une compactification projective G-équivariante $\overline{Q}$ telle que $\overline{Q} - Q$ n'ait aucun point séparable sur K.

On en déduit le théorème suivant :

Utilisation d'une compactification

Soit G un K-groupe algébrique. Il existe un plus grand sous-K-schéma (en groupes) lisse G_0 de G (l'adhérence de Zariski de l'ensemble des points de G à corps résiduel séparable sur K).

Théorème 4 (Gabber)

Le quotient $Q := G/G_0$ admet une compactification projective G-équivariante $\overline{Q}$ telle que $\overline{Q} - Q$ n'ait aucun point séparable sur K.

On en déduit le théorème suivant :

Utilisation d'une compactification

Soit G un K-groupe algébrique. Il existe un plus grand sous-K-schéma (en groupes) lisse G_0 de G (l'adhérence de Zariski de l'ensemble des points de G à corps résiduel séparable sur K).

Théorème 4 (Gabber)

Le quotient $Q := G/G_0$ admet une compactification projective G-équivariante $\overline{Q}$ telle que $\overline{Q} - Q$ n'ait aucun point séparable sur K.

On en déduit le théorème suivant :

Utilisation d'une compactification

Théorème 5 (Gille-LMB)

On suppose que K est un corps local*. Soient G un K-groupe algébrique, Y une K-variété et $f : X \to Y$ un G_Y-torseur.*
Alors l'image de $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est localement fermée, et f_{top} induit un homéomorphisme

$$X(K)/G(K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\,(f_{\mathrm{top}}).$$

Pour la démonstration, on introduit la compactification $\overline{Q}$ de $Q = G/G_0$ (théorème précédent), et l'on décompose f en

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \overline{Z} & \longrightarrow & Y. \\ & & \| & & \| & & \\ & & X/G_0 & & X \wedge^G \overline{Q} & & \end{array}$$

Utilisation d'une compactification

Théorème 5 (Gille-LMB)

On suppose que K est un corps local*. Soient G un K-groupe algébrique, Y une K-variété et $f : X \to Y$ un G_Y-torseur.*
Alors l'image de $f_{\mathrm{top}} : X(K) \to Y(K)$ est localement fermée, et f_{top} induit un homéomorphisme

$$X(K)/G(K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\,(f_{\mathrm{top}}).$$

Pour la démonstration, on introduit la compactification $\overline{Q}$ de $Q = G/G_0$ (théorème précédent), et l'on décompose f en

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \overline{Z} & \longrightarrow & Y. \\ & & \| & & \| & & \\ & & X/G_0 & & X \wedge^G \overline{Q} & & \end{array}$$

Suite de l'exposé :

esquisse de démonstration du principe de Hasse approché

(méthode due à Becker-Denef-Lipshitz-van den Dries, 1979)

Ultraproduits : définition

Soient W un ensemble infini et $A = (A_w)_{w \in W}$ une famille d'ensembles. On voit A comme un faisceau $\underline{A}$ sur l'espace discret W.

On a un plongement ouvert dense canonique

$$j : W \hookrightarrow \overline{W} \quad := \quad \text{compactifié de Stone-Čech (universel) de } W$$

d'où un faisceau $j_*\underline{A}$ sur $\overline{W}$.

Soit $u : \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \overline{W}$ un point de $\overline{W} \setminus W$. La fibre

Ultraproduits : définition

Soient W un ensemble infini et $A = (A_w)_{w \in W}$ une famille d'ensembles. On voit A comme un faisceau $\underline{A}$ sur l'espace discret W.

On a un plongement ouvert dense canonique

$$j : W \hookrightarrow \overline{W} \quad := \quad \text{compactifié de Stone-Čech (universel) de } W$$

d'où un faisceau $j_* \underline{A}$ sur $\overline{W}$.

Soit $u : \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \overline{W}$ un point de $\overline{W} \setminus W$. La fibre

Ultraproduits : définition

Soient W un ensemble infini et $A = (A_w)_{w \in W}$ une famille d'ensembles. On voit A comme un faisceau $\underline{A}$ sur l'espace discret W.

On a un plongement ouvert dense canonique

$$j : W \hookrightarrow \overline{W} \quad := \quad \text{compactifié de Stone-Čech (universel) de } W$$

d'où un faisceau $j_* \underline{A}$ sur $\overline{W}$.

Soit $u : \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \overline{W}$ un point de $\overline{W} \setminus W$. La fibre

Ultraproduits : définition

Soient W un ensemble infini et $A = (A_w)_{w \in W}$ une famille d'ensembles. On voit A comme un faisceau $\underline{A}$ sur l'espace discret W.

On a un plongement ouvert dense canonique

$$j : W \hookrightarrow \overline{W} \quad := \quad \text{compactifié de Stone-Čech (universel) de } W$$

d'où un faisceau $j_* \underline{A}$ sur $\overline{W}$.

Soit $u : \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \overline{W}$ un point de $\overline{W} \setminus W$. La fibre

Ultraproduits : définition

Soient W un ensemble infini et $A = (A_w)_{w \in W}$ une famille d'ensembles. On voit A comme un faisceau $\underline{A}$ sur l'espace discret W.

On a un plongement ouvert dense canonique

$$j : W \hookrightarrow \overline{W} \quad := \quad \text{compactifié de Stone-Čech (universel) de } W$$

d'où un faisceau $j_* \underline{A}$ sur $\overline{W}$.

Soit $u : \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \overline{W}$ un point de $\overline{W} \setminus W$. La fibre

$$u^* j_* \underline{A} \quad = (j_* \underline{A})_u$$

Ultraproduits : définition

Soient W un ensemble infini et $A = (A_w)_{w \in W}$ une famille d'ensembles. On voit A comme un faisceau $\underline{A}$ sur l'espace discret W.

On a un plongement ouvert dense canonique

$$j : W \hookrightarrow \overline{W} \quad := \quad \text{compactifié de Stone-Čech (universel) de } W$$

d'où un faisceau $j_* \underline{A}$ sur $\overline{W}$.

Soit $u : \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \overline{W}$ un point de $\overline{W} \setminus W$. La fibre

$$u^* j_* \underline{A} \quad = (j_* \underline{A})_u$$

est par définition l'ultraproduit de A associé à u, noté $\operatorname*{ulim}_{u,w} A_w$ (notation de H. Schoutens).

Ultraproduits : définition

Soient W un ensemble infini et $A = (A_w)_{w \in W}$ une famille d'ensembles. On voit A comme un faisceau $\underline{A}$ sur l'espace discret W.

On a un plongement ouvert dense canonique

$$j : W \hookrightarrow \overline{W} \quad := \quad \text{compactifié de Stone-Čech (universel) de } W$$

d'où un faisceau $j_*\underline{A}$ sur $\overline{W}$.

Soit $u : \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \overline{W}$ un point de $\overline{W} \setminus W$. La fibre

$$u^* j_* \underline{A} \quad = (j_* \underline{A})_u$$

est par définition l'ultraproduit de A associé à u, noté $\operatorname*{ulim}_{u,w} A_w$ (notation de H. Schoutens).

Le point u correspond à un ultrafiltre (non trivial) $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(W)$; la définition habituelle de la fibre donne alors

$$\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},w} A_w \quad = \quad \varinjlim_{W' \in \mathscr{U}} \prod_{w \in W'} A_w .$$

Ultraproduits : définition

Soient W un ensemble infini et $A = (A_w)_{w \in W}$ une famille d'ensembles. On voit A comme un faisceau $\underline{A}$ sur l'espace discret W.

On a un plongement ouvert dense canonique

$$j : W \hookrightarrow \overline{W} \quad := \quad \text{compactifié de Stone-Čech (universel) de } W$$

d'où un faisceau $j_*\underline{A}$ sur $\overline{W}$.

Soit $u : \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \overline{W}$ un point de $\overline{W} \setminus W$. La fibre

$$u^* j_* \underline{A} \quad = (j_* \underline{A})_u$$

est par définition l'ultraproduit de A associé à u, noté $\underset{u,w}{\mathrm{ulim}}\, A_w$ (notation de H. Schoutens).
Le point u correspond à un ultrafiltre (non trivial) $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(W)$; la définition habituelle de la fibre donne alors

$$\underset{\mathscr{U},w}{\mathrm{ulim}}\, A_w \quad = \quad \varinjlim_{W' \in \mathscr{U}} \prod_{w \in W'} A_w.$$

Ultraproduits : définition

Soient W un ensemble infini et $A = (A_w)_{w \in W}$ une famille d'ensembles. On voit A comme un faisceau $\underline{A}$ sur l'espace discret W.

On a un plongement ouvert dense canonique

$$j : W \hookrightarrow \overline{W} \quad := \quad \text{compactifié de Stone-Čech (universel) de } W$$

d'où un faisceau $j_*\underline{A}$ sur $\overline{W}$.

Soit $u : \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow \overline{W}$ un point de $\overline{W} \setminus W$. La fibre

$$u^* j_* \underline{A} \quad = (j_* \underline{A})_u$$

est par définition l'ultraproduit de A associé à u, noté $\underset{u,w}{\mathrm{ulim}}\, A_w$ (notation de H. Schoutens).

Le point u correspond à un ultrafiltre (non trivial) $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(W)$; la définition habituelle de la fibre donne alors

$$\underset{\mathscr{U},w}{\mathrm{ulim}}\, A_w \quad = \quad \varinjlim_{W' \in \mathscr{U}} \prod_{w \in W'} A_w .$$

Ultraproduits : définition

$$\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},w} A_w := (j_*\underline{A})_{\mathscr{U}} = \varinjlim_{W'\in\mathscr{U}} \prod_{w\in W'} A_w .$$

Si chaque A_w est non vide, on a la formule plus connue

$$\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},w} A_w = \left(\prod_{w\in W} A_w\right) \Big/ \sim_{\mathscr{U}}$$

où la relation d'équivalence $\sim_{\mathscr{U}}$ est l'égalité « $\mathscr{U}$-presque partout » :

$$(x_w) \sim_{\mathscr{U}} (y_w) \iff \{w \mid x_w = y_w\} \in \mathscr{U} .$$

Ultraproduits : définition

$$
\begin{aligned}
\underset{\mathscr{U},w}{\mathrm{ulim}}\; A_w &:= (j_*\underline{A})_{\mathscr{U}} \\
&= \varinjlim_{W' \in \mathscr{U}} \prod_{w \in W'} A_w .
\end{aligned}
$$

Si chaque A_w est non vide, on a la formule plus connue

$$
\underset{\mathscr{U},w}{\mathrm{ulim}}\; A_w = \left(\prod_{w \in W} A_w \right) \Big/ \sim_{\mathscr{U}}
$$

où la relation d'équivalence $\sim_{\mathscr{U}}$ est l'égalité « $\mathscr{U}$-presque partout » :

$$
(x_w) \sim_{\mathscr{U}} (y_w) \iff \{w \mid x_w = y_w\} \in \mathscr{U} .
$$

Ultraproduits : définition

$$\begin{aligned} \operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},w} A_w &:= (j_*\underline{A})_{\mathscr{U}} \\ &= \varinjlim_{W'\in\mathscr{U}} \prod_{w\in W'} A_w . \end{aligned}$$

Si chaque A_w est non vide, on a la formule plus connue

$$\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},w} A_w = \left(\prod_{w\in W} A_w\right) \Big/ \sim_{\mathscr{U}}$$

où la relation d'équivalence $\sim_{\mathscr{U}}$ est l'égalité « $\mathscr{U}$-presque partout » :

$$(x_w) \sim_{\mathscr{U}} (y_w) \iff \{w \mid x_w = y_w\} \in \mathscr{U} .$$

Ultraproduits : définition

$$\begin{aligned} \operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},w} A_w &:= (j_* \underline{A})_{\mathscr{U}} \\ &= \varinjlim_{W' \in \mathscr{U}} \prod_{w \in W'} A_w . \end{aligned}$$

Si chaque A_w est non vide, on a la formule plus connue

$$\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},w} A_w = \left(\prod_{w \in W} A_w \right) \Big/ \sim_{\mathscr{U}}$$

où la relation d'équivalence $\sim_{\mathscr{U}}$ est l'égalité « $\mathscr{U}$-presque partout » :

$$(x_w) \sim_{\mathscr{U}} (y_w) \iff \{w \mid x_w = y_w\} \in \mathscr{U} .$$

Si les A_w sont un même A, on obtient l'ultrapuissance

$$A^* = \operatorname*{upw}_{\mathscr{U}} A$$

qui contient A comme sous-ensemble.

Si les A_w sont munis d'une structure du premier ordre (groupes, ensembles ordonnés, anneaux. . .), il en est de même de l'ultraproduit.

Si les A_w sont un même A, on obtient l'ultrapuissance

$$A^* = \underset{\mathscr{U}}{\mathrm{upw}}\ A$$

qui contient A comme sous-ensemble.

Si les A_w sont munis d'une structure du premier ordre (groupes, ensembles ordonnés, anneaux...), il en est de même de l'ultraproduit.

Ultraproduits : mode d'emploi

Point clé : les ultraproduits préservent les propriétés du premier ordre. Par exemple, pour une famille (A_w) d'anneaux commutatifs unitaires, d'ultraproduit noté A^* :

$$A^* \text{ est un corps} \quad \Longleftrightarrow \quad \{w \in W \mid A_w \text{ est un corps}\} \in \mathscr{U}$$

car « A est un corps » équivaut à la formule

$$(1 \neq 0) \text{ et } \Big(\forall x \Big((x = 0) \text{ ou } (\exists y, xy = 1)\Big)\Big)$$

dans laquelle tous les quantificateurs portent sur les éléments de A.

Ultraproduits : mode d'emploi

Point clé : les ultraproduits préservent les propriétés du premier ordre. Par exemple, pour une famille (A_w) d'anneaux commutatifs unitaires, d'ultraproduit noté A^* :

$$A^* \text{ est un corps} \quad \Longleftrightarrow \quad \{w \in W \mid A_w \text{ est un corps}\} \in \mathscr{U}$$

car « A est un corps » équivaut à la formule

$$(1 \neq 0) \text{ et } \Big(\forall x \Big((x = 0) \text{ ou } (\exists y, xy = 1)\Big)\Big)$$

dans laquelle tous les quantificateurs portent sur les éléments de A.

Ultraproduits : mode d'emploi

Un peu plus élaboré : « A est un corps de caractéristique nulle » équivaut à la conjonction des propriétés suivantes :

- « A est un corps » (cf. ci-dessus) ;
- pour chaque entier $n \geq 1$, la propriété P_n : « $n.1_K \neq 0$ ».

Il est clair que chaque P_n est du premier ordre, donc la propriété « corps de caractéristique nulle » l'est aussi (et est conservée par ultraproduits).

Ultraproduits : mode d'emploi

Un peu plus élaboré : « A est un corps de caractéristique nulle » équivaut à la conjonction des propriétés suivantes :

- « A est un corps » (cf. ci-dessus) ;
- pour chaque entier $n \geq 1$, la propriété P_n : « $n.1_K \neq 0$ ».

Il est clair que chaque P_n est du premier ordre, donc la propriété « corps de caractéristique nulle » l'est aussi (et est conservée par ultraproduits).

Ultraproduits : mode d'emploi

Un peu plus élaboré : « A est un corps de caractéristique nulle » équivaut à la conjonction des propriétés suivantes :

- « A est un corps » (cf. ci-dessus) ;
- pour chaque entier $n \geq 1$, la propriété P_n : « $n.1_K \neq 0$ ».

Il est clair que chaque P_n est du premier ordre, donc la propriété « corps de caractéristique nulle » l'est aussi (et est conservée par ultraproduits).

Ultraproduits : mode d'emploi

Par exemple, les propriétés d'anneaux suivantes sont du premier ordre, donc conservées par ultraproduit :

- intègre ;
- réduit ;
- corps de caractéristique p (premier donné) ;
- anneau de valuation ;
- corps algébriquement clos ;
- anneau local hensélien ;
- corps de caractéristique nulle.

Les 4 premières sont même définissables par une seule formule.

Ultraproduits : mode d'emploi

Par exemple, les propriétés d'anneaux suivantes sont du premier ordre, donc conservées par ultraproduit :

- intègre ;
- réduit ;
- corps de caractéristique p (premier donné) ;
- anneau de valuation ;
- corps algébriquement clos ;
- anneau local hensélien ;
- corps de caractéristique nulle.

Les 4 premières sont même définissables par une seule formule.

Ultraproduits : mode d'emploi

Les propriétés suivantes ne sont pas du premier ordre :

- corps de caractéristique positive ;
- anneau noethérien ;
- anneau de valuation discrète.

Preuve du P.H.A. (esquisse)

R : anneau de valuation hensélien, $\widehat{K}/K$ séparable ;
X : R-schéma de présentation finie.
On veut montrer :

$$\text{si } X(R_\alpha) \neq \emptyset \text{ pour tout } \alpha \in \Gamma_+, \text{ alors } X(R) \neq \emptyset.$$

On suppose donc que $\prod_{\alpha \in \Gamma_+} X(R_\alpha) \neq \emptyset$.

Ceci équivaut à $X\left(\prod_{\alpha \in \Gamma_+} R_\alpha\right) \neq \emptyset$ (les R_α sont locaux).

Si l'on fixe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur $W := \Gamma_+$, cette condition entraîne

$$X\left(\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} R_\alpha\right) \neq \emptyset.$$

Preuve du P.H.A. (esquisse)

R : anneau de valuation hensélien, $\widehat{K}/K$ séparable ;
X : R-schéma de présentation finie.
On veut montrer :

$$\text{si } X(R_\alpha) \neq \emptyset \text{ pour tout } \alpha \in \Gamma_+, \text{ alors } X(R) \neq \emptyset.$$

On suppose donc que $\prod_{\alpha \in \Gamma_+} X(R_\alpha) \neq \emptyset$.

Ceci équivaut à $X\left(\prod_{\alpha \in \Gamma_+} R_\alpha\right) \neq \emptyset$ (les R_α sont locaux).

Si l'on fixe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur $W := \Gamma_+$, cette condition entraîne

$$X\left(\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} R_\alpha\right) \neq \emptyset.$$

Preuve du P.H.A. (esquisse)

R : anneau de valuation hensélien, $\widehat{K}/K$ séparable ;
X : R-schéma de présentation finie.
On veut montrer :

$$\text{si } X(R_\alpha) \neq \emptyset \text{ pour tout } \alpha \in \Gamma_+, \text{ alors } X(R) \neq \emptyset.$$

On suppose donc que $\prod_{\alpha \in \Gamma_+} X(R_\alpha) \neq \emptyset$.

Ceci équivaut à $X\left(\prod_{\alpha \in \Gamma_+} R_\alpha\right) \neq \emptyset$ (les R_α sont locaux).

Si l'on fixe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur $W := \Gamma_+$, cette condition entraîne

$$X\left(\operatorname{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} R_\alpha\right) \neq \emptyset.$$

Preuve du P.H.A. (esquisse)

R : anneau de valuation hensélien, $\widehat{K}/K$ séparable ;
X : R-schéma de présentation finie.
On veut montrer :

$$\text{si } X(R_\alpha) \neq \emptyset \text{ pour tout } \alpha \in \Gamma_+, \text{ alors } X(R) \neq \emptyset.$$

On suppose donc que $\prod_{\alpha \in \Gamma_+} X(R_\alpha) \neq \emptyset$.

Ceci équivaut à $X\left(\prod_{\alpha \in \Gamma_+} R_\alpha\right) \neq \emptyset$ (les R_α sont locaux).

Si l'on fixe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur $W := \Gamma_+$, cette condition entraîne

$$X\left(\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} R_\alpha\right) \neq \emptyset.$$

$$X\left(\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} R_\alpha\right) \neq \emptyset.$$

L'anneau $\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} R_\alpha$ s'identifie à R^*/I_δ, où :

- $R^* = \operatorname*{upw}_{\mathscr{U}} R$ (anneau de valuation hensélien contenant R, de groupe $\Gamma^* := \operatorname*{upw}_{\mathscr{U}} \Gamma$) ;
- $\delta \in \Gamma^*_+$ est l'élément « diagonal » $\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} \alpha$ (classe de la famille $(\alpha)_{\alpha\in\Gamma_+}$).

Choisissons $\mathscr{U}$ contenant tous les ensembles $[\gamma, +\infty[\subset \Gamma_+$.

Alors δ est « infiniment grand » (plus grand que Γ). Donc $I_\delta \subset P := \{x \in R^* \mid v(x) > \Gamma\}$; ce P est un idéal premier de R^*.

$$X\left(\underset{\mathscr{U},\alpha}{\mathrm{ulim}}\ R_\alpha\right) \neq \emptyset.$$

L'anneau $\underset{\mathscr{U},\alpha}{\mathrm{ulim}}\ R_\alpha$ s'identifie à R^*/I_δ, où :

- $R^* = \underset{\mathscr{U}}{\mathrm{upw}}\ R$ (anneau de valuation hensélien contenant R, de groupe $\Gamma^* := \underset{\mathscr{U}}{\mathrm{upw}}\ \Gamma$) ;
- $\delta \in \Gamma^*_+$ est l'élément « diagonal » $\underset{\mathscr{U},\alpha}{\mathrm{ulim}}\ \alpha$ (classe de la famille $(\alpha)_{\alpha\in\Gamma_+}$).

Choisissons $\mathscr{U}$ contenant tous les ensembles $[\gamma, +\infty[\subset \Gamma_+$.

Alors δ est « infiniment grand » (plus grand que Γ). Donc $I_\delta \subset P := \{x \in R^* \mid v(x) > \Gamma\}$; ce P est un idéal premier de R^*.

$$X\left(\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} R_\alpha\right) \neq \emptyset.$$

L'anneau $\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} R_\alpha$ s'identifie à R^*/I_δ, où :

- $R^* = \operatorname*{upw}_{\mathscr{U}} R$ (anneau de valuation hensélien contenant R, de groupe $\Gamma^* := \operatorname*{upw}_{\mathscr{U}} \Gamma$) ;
- $\delta \in \Gamma^*_+$ est l'élément « diagonal » $\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} \alpha$ (classe de la famille $(\alpha)_{\alpha\in\Gamma_+}$).

Choisissons $\mathscr{U}$ contenant tous les ensembles $[\gamma, +\infty[\subset \Gamma_+$.

Alors δ est « infiniment grand » (plus grand que Γ). Donc $I_\delta \subset P := \{x \in R^* \mid v(x) > \Gamma\}$; ce P est un idéal premier de R^*.

$$X\left(\underset{\mathscr{U},\alpha}{\mathrm{ulim}}\ R_\alpha\right) \neq \emptyset.$$

L'anneau $\underset{\mathscr{U},\alpha}{\mathrm{ulim}}\ R_\alpha$ s'identifie à R^*/I_δ, où :

- $R^* = \underset{\mathscr{U}}{\mathrm{upw}}\ R$ (anneau de valuation hensélien contenant R, de groupe $\Gamma^* := \underset{\mathscr{U}}{\mathrm{upw}}\ \Gamma$) ;
- $\delta \in \Gamma^*_+$ est l'élément « diagonal » $\underset{\mathscr{U},\alpha}{\mathrm{ulim}}\ \alpha$ (classe de la famille $(\alpha)_{\alpha\in\Gamma_+}$).

Choisissons $\mathscr{U}$ contenant tous les ensembles $[\gamma, +\infty[\subset \Gamma_+$.

Alors δ est « infiniment grand » (plus grand que Γ). Donc $I_\delta \subset P := \{x \in R^* \mid v(x) > \Gamma\}$; ce P est un idéal premier de R^*.

$$X\left(\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} R_\alpha\right) \neq \emptyset.$$

L'anneau $\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} R_\alpha$ s'identifie à R^*/I_δ, où :

- $R^* = \operatorname*{upw}_{\mathscr{U}} R$ (anneau de valuation hensélien contenant R, de groupe $\Gamma^* := \operatorname*{upw}_{\mathscr{U}} \Gamma$) ;
- $\delta \in \Gamma^*_+$ est l'élément « diagonal » $\operatorname*{ulim}_{\mathscr{U},\alpha} \alpha$ (classe de la famille $(\alpha)_{\alpha\in\Gamma_+}$).

Choisissons $\mathscr{U}$ contenant tous les ensembles $[\gamma, +\infty[\subset \Gamma_+$.

Alors δ est « infiniment grand » (plus grand que Γ). Donc $I_\delta \subset P := \{x \in R^* \mid v(x) > \Gamma\}$; ce P est un idéal premier de R^*.

On a donc les implications :

$$\forall \alpha,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset \underset{\text{(déjà vu)}}{\Longrightarrow} X(R^*/I_\delta) \neq \emptyset \underset{I_\delta \subset P}{\Longrightarrow} X(R^*/P) \neq \emptyset$$

Posons $\overline{R} := R^*/P$. C'est un anneau de valuation hensélien contenant R (son groupe de valuation est l'enveloppe convexe de Γ dans Γ^*).

On a une suite de morphismes $R \hookrightarrow R^* \twoheadrightarrow \overline{R}$ induisant un diagramme d'ensembles

$$X(R) \longrightarrow X(R^*) \longrightarrow X(\overline{R}) \neq \emptyset.$$

On vérifie (parce que R est local) que $X(R^*) = \underset{\mathscr{U}}{\mathrm{upw}}\, X(R)$. En particulier :

$$X(R) \neq \emptyset \Longleftrightarrow X(R^*) \neq \emptyset.$$

Il suffit donc de montrer que « $X(\overline{R}) \neq \emptyset$ » implique « $X(R^*) \neq \emptyset$ ». En fait :

Théorème 6 (relèvement)

Sous les hypothèses du théorème 1, et avec les notations ci-dessus, l'application $X(R^*) \to X(\overline{R})$ est surjective.

On a donc les implications :

$$\forall \alpha,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset \quad \underset{\text{(déjà vu)}}{\Longrightarrow} \quad X(R^*/I_\delta) \neq \emptyset \quad \underset{I_\delta \subset P}{\Longrightarrow} \quad X(R^*/P) \neq \emptyset$$

Posons $\overline{R} := R^*/P$. C'est un anneau de valuation hensélien contenant R (son groupe de valuation est l'enveloppe convexe de Γ dans Γ^*).

On a une suite de morphismes $R \hookrightarrow R^* \twoheadrightarrow \overline{R}$ induisant un diagramme d'ensembles

$$X(R) \longrightarrow X(R^*) \longrightarrow X(\overline{R}) \neq \emptyset.$$

On vérifie (parce que R est local) que $X(R^*) = \underset{\mathscr{U}}{\mathrm{upw}}\, X(R)$. En particulier :

$$X(R) \neq \emptyset \Longleftrightarrow X(R^*) \neq \emptyset.$$

Il suffit donc de montrer que « $X(\overline{R}) \neq \emptyset$ » implique « $X(R^*) \neq \emptyset$ ». En fait :

Théorème 6 (relèvement)

Sous les hypothèses du théorème 1, et avec les notations ci-dessus, l'application $X(R^*) \to X(\overline{R})$ est surjective.

On a donc les implications :

$$\forall\alpha,\ X(R_\alpha)\neq\emptyset \underset{\text{(déjà vu)}}{\Longrightarrow} X(R^*/I_\delta)\neq\emptyset \underset{I_\delta\subset P}{\Longrightarrow} X(R^*/P)\neq\emptyset$$

Posons $\overline{R} := R^*/P$. C'est un anneau de valuation hensélien contenant R (son groupe de valuation est l'enveloppe convexe de Γ dans Γ^*).

On a une suite de morphismes $R \hookrightarrow R^* \twoheadrightarrow \overline{R}$ induisant un diagramme d'ensembles

$$X(R) \longrightarrow X(R^*) \longrightarrow X(\overline{R}) \neq \emptyset.$$

On vérifie (parce que R est local) que $X(R^*) = \operatorname{upw}_{\mathscr{U}} X(R)$. En particulier :

$$X(R)\neq\emptyset \Longleftrightarrow X(R^*)\neq\emptyset.$$

Il suffit donc de montrer que « $X(\overline{R})\neq\emptyset$ » implique « $X(R^*)\neq\emptyset$ ». En fait :

Théorème 6 (relèvement)

Sous les hypothèses du théorème 1, et avec les notations ci-dessus, l'application $X(R^*)\to X(\overline{R})$ est surjective.

On a donc les implications :

$$\forall\alpha,\ X(R_\alpha)\neq\emptyset \underset{\text{(déjà vu)}}{\Longrightarrow} X(R^*/I_\delta)\neq\emptyset \underset{I_\delta\subset P}{\Longrightarrow} X(R^*/P)\neq\emptyset$$

Posons $\overline{R}:=R^*/P$. C'est un anneau de valuation hensélien contenant R (son groupe de valuation est l'enveloppe convexe de Γ dans Γ^*).

On a une suite de morphismes $R\hookrightarrow R^*\twoheadrightarrow\overline{R}$ induisant un diagramme d'ensembles

$$X(R)\longrightarrow X(R^*)\longrightarrow X(\overline{R})\neq\emptyset.$$

On vérifie (parce que R est local) que $X(R^*)=\underset{\mathscr{U}}{\mathrm{upw}}\,X(R)$. En particulier :

$$X(R)\neq\emptyset\iff X(R^*)\neq\emptyset.$$

Il suffit donc de montrer que « $X(\overline{R})\neq\emptyset$ » implique « $X(R^*)\neq\emptyset$ ». En fait :

Théorème 6 (relèvement)

Sous les hypothèses du théorème 1, et avec les notations ci-dessus, l'application $X(R^*)\to X(\overline{R})$ est surjective.

On a donc les implications :

$$\forall \alpha,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset \underset{\text{(déjà vu)}}{\Longrightarrow} X(R^*/I_\delta) \neq \emptyset \underset{I_\delta \subset P}{\Longrightarrow} X(R^*/P) \neq \emptyset$$

Posons $\overline{R} := R^*/P$. C'est un anneau de valuation hensélien contenant R (son groupe de valuation est l'enveloppe convexe de Γ dans Γ^*).

On a une suite de morphismes $R \hookrightarrow R^* \twoheadrightarrow \overline{R}$ induisant un diagramme d'ensembles

$$X(R) \longrightarrow X(R^*) \longrightarrow X(\overline{R}) \neq \emptyset.$$

On vérifie (parce que R est local) que $X(R^*) = \underset{\mathscr{U}}{\text{upw}}\ X(R)$. En particulier :

$$X(R) \neq \emptyset \Longleftrightarrow X(R^*) \neq \emptyset.$$

Il suffit donc de montrer que « $X(\overline{R}) \neq \emptyset$ » implique « $X(R^*) \neq \emptyset$ ». En fait :

Théorème 6 (relèvement)

Sous les hypothèses du théorème 1, et avec les notations ci-dessus, l'application $X(R^*) \to X(\overline{R})$ est surjective.

On a donc les implications :

$$\forall\alpha,\ X(R_\alpha) \neq \emptyset \underset{\text{(déjà vu)}}{\Longrightarrow} X(R^*/I_\delta) \neq \emptyset \underset{I_\delta \subset P}{\Longrightarrow} X(R^*/P) \neq \emptyset$$

Posons $\overline{R} := R^*/P$. C'est un anneau de valuation hensélien contenant R (son groupe de valuation est l'enveloppe convexe de Γ dans Γ^*).

On a une suite de morphismes $R \hookrightarrow R^* \twoheadrightarrow \overline{R}$ induisant un diagramme d'ensembles

$$X(R) \longrightarrow X(R^*) \longrightarrow X(\overline{R}) \neq \emptyset.$$

On vérifie (parce que R est local) que $X(R^*) = \underset{\mathscr{U}}{\mathrm{upw}}\ X(R)$. En particulier :

$$X(R) \neq \emptyset \Longleftrightarrow X(R^*) \neq \emptyset.$$

Il suffit donc de montrer que « $X(\overline{R}) \neq \emptyset$ » implique « $X(R^*) \neq \emptyset$ ». En fait :

Théorème 6 (relèvement)

Sous les hypothèses du théorème 1, et avec les notations ci-dessus, l'application $X(R^*) \to X(\overline{R})$ est surjective.

Théorème 6 (relèvement)

Sous les hypothèses du théorème 1, et avec les notations ci-dessus, l'application $X(R^*) \to X(\overline{R})$ est surjective.

La démonstration utilise la propriété de Hensel pour R^*, et la séparabilité de $\widehat{K}/K$. Cette dernière sert à montrer que $\operatorname{Frac}(\overline{R})$ est séparable sur K.