Licence MIEE, Module AN2

Suites et séries numériques.

L1 - 2010-2011 - S2/S4

Résumé de cours

Chapitre 1

Premières propriétés des nombres réels.

1.1 Introduction

Vous avez déjà rencontré des ensembles de nombres et travaillé avec eux, par exemple :
- l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ;
- l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs ;
- l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, c'est à dire de la forme $n10^{-p}$, où n et p sont des entiers relatifs ;
- l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels :
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;

Ces ensembles vérifient les relations d'inclusion suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
La représentation intuitive de $\mathbb{R}$ se fait sous la forme d'une droite. Néanmoins cette représentation graphique ne permet pas de bien comprendre la distinction entre les réels et les rationnels. Vous connaissez des nombres réels qui ne sont pas rationnels, par exemple $\sqrt{2}$, e ou π, mais il y en a beaucoup d'autres. Ce cours sur les suites permettra entre autres choses d'affiner notre perception, de préciser le « beaucoup » et quelles propriétés on attend de $\mathbb{R}$.
Nous supposerons connus ces ensembles ainsi que leurs propriétés usuelles, concernant l'addition, la multiplication et la relation d'inégalité $\leq$. Pour $\mathbb{R}$, nous les rappelons dans les sections suivantes.
On peut aussi considérer l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, sous leur forme cartésienne $x + iy$ ou polaire $\rho e^{i\theta}$; cet ensemble se construit facilement à partir de $\mathbb{R}$. Sa représentation intuitive est celle d'un plan, dit plan complexe.

1.2 Opérations sur les réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux opérations, l'addition $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ et la multiplication $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \times y$. Rappelons leurs propriétés essentielles :

1. L'addition est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x + y) + z = x + (y + z)$.
2. Elle est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$.
3. Elle admet un élément dit *neutre*, noté 0 et caractérisé par la propriété suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = 0 + x = x$. (« Caractérisé » signifie qu'il est le seul ayant cette propriété, ce qui permet de lui donner un nom).

4. Tout élément x de $\mathbb{R}$ admet un *opposé*, c'est-à-dire un réel y tel que $x+y=y+x=0$; cet élément est unique et on le note $-x$. On abrège l'écriture $x+(-y)$ en $x-y$.
5. La multiplication est associative : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $(x\times y)\times z = x\times(y\times z)$.
6. Elle est commutative : $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $x\times y = y\times x$.
7. Elle admet un unique élément neutre, noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x\times 1 = 1\times x = x$. De plus 1 n'est pas égal à 0.
8. Tout réel non nul x admet un *inverse*, c'est-à-dire un réel y tel que $x\times y = y\times x = 1$; cet inverse est unique et non nul et on le note x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. On abrège l'écriture $x\times\frac{1}{y}$ en $\frac{x}{y}$.
9. Les opérations $+$ et $\times$ sont compatibles : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $(x+y)\times z = (x\times z)+(y\times z)$ et $x\times(y+z) = (x\times y)+(x\times z)$.

L'ensemble de ces propriétés se résume en disant que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un **corps commutatif**. On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

1.3 Relation d'inégalité $\leq$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation notée $\leq$. Pour deux réels x et y, $x\leq y$ se lit : « x est inférieur ou égal à y » ou « y est supérieur ou égal à x », et se note aussi $y\geq x$; on dit que x est positif (respectivement négatif) si on a $0\leq x$ (respectivement $x\leq 0$). On note $\mathbb{R}_+$ (respectivement $\mathbb{R}_-$) l'ensemble des réels positifs (respectivement négatifs).
Rappelons les premières propriétés de la relation $\leq$:

1. Antisymétrie : $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $(x\leq y$ et $y\leq x)\Rightarrow x=y$.
2. Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x\leq x$.
3. Transitivité : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $(x\leq y$ et $y\leq z)\Rightarrow x\leq z$.
4. Totalité : On peut toujours comparer deux réels : $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $(x\leq y)$ ou $(y\leq x)$. (Ceci permet de définir $\max(x,y)$ comme étant y dans le premier cas et x dans le second ; noter qu'il n'y a pas d'ambiguïté même si l'on est dans les deux cas à la fois !).
5. Cette relation est compatible avec $(+)$: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $(x\leq y)\Rightarrow(x+z\leq y+z)$.
6. Elle est compatible avec $(\times)$: $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $(0\leq z$ et $x\leq y)\Rightarrow(z\times x\leq z\times y)$.

L'ensemble de ces propriétés se résume en disant que le corps $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps **totalement ordonné**.
Par définition, $x<y$ (ou encore $y>x$) signifie « $x\leq y$ et $x\neq y$ », et se lit « x est strictement inférieur à y ».

Conséquences

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ est la réunion des deux sous-ensembles $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$, d'intersection $\{0\}$.
2. $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $(x\leq y \Leftrightarrow x-y\leq 0)$.
3. $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $(x\leq y \Rightarrow -y\leq -x)$.
4. $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $(z\leq 0 \quad$ et $\quad x\leq y)\Rightarrow(z\times y\leq z\times x)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(0<x\Rightarrow 0<\frac{1}{x})$ et $(x<0\Rightarrow\frac{1}{x}<0)$.
6. $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $(0<x\leq y\Rightarrow 0<\frac{1}{y}\leq\frac{1}{x})$.

Exercice. Démontrer ces six points en utilisant les propriétés de $\leq$ rappelées plus haut.

$\triangle$ Manipuler des inégalités avec des sommes ne pose en général pas de problème. Il n'en est pas de même quand on passe aux inverses ou qu'on multiplie une inégalité par un nombre ou deux inégalités entre elles. Une seule solution : être **très** prudent !

1.4 Valeur absolue

Définition 1.4.1. *On définit la fonction valeur absolue, notée $x \mapsto |x|$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en posant pour $x \in \mathbb{R}$:*

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Propriétés. Pour tout réel x, on a :

$$0 \leq |x| \quad \text{et} \quad (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$$

$$|x| = |-x|, \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\text{si} \quad A \in \mathbb{R}_+, \ (|x| \leq A \Leftrightarrow -A \leq x \leq A)$$

Pour tous réels x, y, on a :

$$|xy| = |x||y|$$

et les « inégalités triangulaires » :

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

1.5 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.5.1. *Soient a, b des réels, avec $a \leq b$. On définit les ensembles suivants :*

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
4. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
5. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
6. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
7. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
8. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
9. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle *si elle est de l'un des types ci-dessus.*

Noter que si $a = b$, on a $[a, b] = \{a\}$ et $]a, b[=]a, b] = [a, b[= \emptyset$ (de sorte que l'ensemble vide est un intervalle !). En général on prend soin de supposer $a < b$ dans les cas 2 à 4.

En-dehors de ce cas, on peut montrer qu'un intervalle I *non vide* appartient à un seul des types 1 à 9, et que les réels a et b sont alors (le cas échéant) déterminés par I. (La démonstration sera plus simple lorsque nous aurons vu les notions de borne inférieure et de borne supérieure).

Dans les quatre premiers cas, a et b sont les *bords* (ou extrémités) de l'intervalle (supposé non vide), $b - a$ est sa *longueur* et son *centre* (ou milieu) est $\frac{a+b}{2}$. Dans les cas 5 à 8, on parle aussi de demi-droites de *bord* a.

Un intervalle I est ouvert s'il est de la forme $]a, b[$, $] - \infty, a[$ ou $]a, +\infty[$, fermé s'il est de la forme $[a, b]$, $] - \infty, a]$ ou $[a, +\infty[$.

On notera $\overline{I}$ le plus petit intervalle fermé qui contient I, c'est à dire $[a, b]$ pour un intervalle de bords a et b, $[a, +\infty[$ dans les cas 5 et 6, $] - \infty, a]$ dans les cas 7 et 8 (exercice).

Remarque. Soient ℓ, x et ε des réels tels que $\varepsilon > 0$. L'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ est centré en ℓ, ε est son rayon et $|x - \ell|$ est la distance de x à ℓ. Dire que x est dans l'intervalle ouvert de centre ℓ et de rayon ε revient à dire que la distance de x à ℓ est strictement inférieure à ε. Autrement dit, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $|x - \ell| < \varepsilon$
2. $\ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon$
3. $x \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Proposition 1.5.2. *Soit I un intervalle. Pour tous les éléments x et y de I tels que $x \leq y$, on a $[x, y] \subset I$.*

Remarque. On peut montrer que la réciproque de cette proposition est encore vraie (toute partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété de l'énoncé est un intervalle). On obtient ainsi une caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Considérons le cas d'un intervalle I de bords a et b, $a < b$. (Les autres cas sont laissés au lecteur). Soient x, y dans I et $z \in [x, y]$. Si $z = x$ ou $z = y$, on a $z \in I$ par hypothèse. Sinon, on a $a \leq x < z < y \leq b$, donc $z \in]a, b[$ et comme $]a, b[$ est inclus dans I, on obtient $z \in I$. Donc $[x, y] \subset I$. ∎

Proposition 1.5.3. *Soit I un intervalle ouvert et ℓ un élément de I. Il existe alors un intervalle ouvert, contenu dans I et de centre ℓ.*

Démonstration. (Pour la comprendre, faire un dessin !) Considérons le cas d'un intervalle $I =]a, b[$. Notons $\varepsilon = \min(\ell - a, b - \ell)$. On a $\varepsilon > 0$, $a = \ell - (\ell - a) \leq \ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon \leq \ell + (b - \ell) = b$. Soit $x \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$; on a $a \leq \ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon \leq b$, d'où $x \in]a, b[$. Donc $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ est contenu dans $]a, b[$.
Les autres cas sont laissés en exercice. ∎

1.6 Majorants et minorants

Définitions 1.6.1. *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

1. *Dire qu'un réel M est un* majorant *de E signifie que M est supérieur ou égal à tous les éléments de E, c'est-à-dire*
$$\forall x \in E, x \leq M, \quad \text{ou encore : } E \subset]-\infty, M].$$
2. *Un réel m est un* minorant *de E si m est inférieur ou égal à tous les éléments de E, c'est-à-dire si*
$$\forall x \in E, m \leq x, \quad \text{ou encore : } E \subset [m, +\infty[.$$
3. *L'ensemble E est majoré s'il admet un majorant, minoré s'il admet un minorant, borné s'il admet un majorant et un minorant.*

Remarque. Un ensemble E est borné si et seulement si il existe B tel que $\forall x \in E$, $|x| \leq B$.

Définitions 1.6.2. *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

1. *Dire qu'un réel M est un* plus grand élément *de E signifie que M est un majorant de E qui appartient à E. On note alors $M = \max E$.*
2. *Un réel m est un* plus petit élément *de E si m est un minorant de E et appartient à E. On note alors $m = \min E$.*

Exemples. L'intervalle $[0, +\infty[$ est minoré (par -24 par exemple), n'est pas majoré donc pas borné. Il admet un plus petit élément (0) et pas de plus grand élément.
L'intervalle $]-2, 1[$ est borné : on peut le majorer par tout réel supérieur ou égal à 1, le minorer par tout réel inférieur ou égal à -2, on a aussi $\forall x \in]-2, 1[$, $|x| \leq 2$. Il n'admet ni plus grand élément ni plus petit élément (exercice).
L'ensemble vide est borné ; il n'a ni plus grand élément ni plus petit élément (et pour cause : il n'a pas d'élément du tout).
Un ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$ a *au plus* un plus grand élément : si x et y sont deux plus grands éléments de E, alors $x \leq y$ (car $x \in E$ et y majore E) et $y \leq x$ (en échangeant les rôles), d'où $x = y$. Autrement dit « le plus grand élément, s'il existe, est unique » et il mérite donc l'article défini. Même remarque pour le plus petit élément.

1.7 Extension aux fonctions

Soit S un ensemble quelconque. Beaucoup des notions définies précédemment pour les réels s'étendent aux « fonctions réelles sur S », c'est-à-dire aux applications de S dans $\mathbb{R}$. L'ensemble de ces applications se note (parfois) $\mathbb{R}^S$.

Si f et g sont deux fonctions réelles sur S, on définit leur somme $f+g$ « point par point », c'est-à-dire par la formule
$$\forall x \in S, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
On fait de même pour le produit, l'opposé, la différence...

△ Les propriétés 1 à 9 de 1.2 sont encore valables, *à l'exception de 8* : dire qu'une fonction f n'est pas nulle ($f \neq 0$) signifie qu'elle n'est pas la fonction nulle (autrement dit, il existe $x \in S$ tel que $f(x) \neq 0$) ; dire qu'elle est inversible équivaut à dire qu'elle est *partout non nulle* (autrement dit, que l'on a $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in S$).

On dit que $f \leq g$ si l'on a $f(x) \leq g(x)$ *pour tout x dans E.* Cette relation vérifie les propriétés 1 à 6 de 1.3, *à l'exception de 4* : par exemple la fonction $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ n'est ni positive, ni négative.

$\triangle$ On prendra garde que la notation « $f > 0$ » signifie par définition que $f(x) > 0$ pour tout x dans S, ce qui n'est pas la même chose que « $f \geq 0$ et $f \neq 0$ ».

On dit qu'une fonction f sur S est *majorée* s'il existe un réel M tel que $f \leq M$ (où le second membre désigne la fonction constante M sur S), autrement dit tel que l'on ait $f(x) \leq M$ pour tout x dans S. Bien entendu un tel M est appelé *majorant* de f.

Dire que f est majorée [par M] équivaut à dire que *l'image* de f, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$f(S) = \mathrm{Im}(f) = \{f(x); x \in S\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in S \text{ tel que } f(x) = y\}$$

est majorée [par M]. On définit de même les fonctions minorées et les fonctions bornées.

Exercice. La somme de deux fonctions majorées (resp. minorées, resp. bornées) a la même propriété. Le produit et la différence de deux fonctions bornées sont des fonctions bornées.

Si f est majorée (minorée, bornée), que peut-on dire de $-f$?

1.8 Entiers et réels

Principe de récurrence
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Supposons que :

1. $0 \in E$;
2. pour tout entier n, si $n \in E$, alors $n + 1 \in E$.

Alors $E = \mathbb{N}$.

Mode d'emploi. On applique ce principe lorsqu'on veut démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$, a priori vraie ou fausse selon la valeur de l'entier naturel n est vraie pour tous les entiers n. On considère l'ensemble E des entiers n tels que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.
Une première étape est de bien définir la propriété $\mathcal{P}(n)$. Restent deux étapes :

1. Initialisation de la récurrence : on montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2. Hérédité : on fixe un entier n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

On peut alors conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers n.

Définition 1.8.1. *On dit qu'un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe un entier n non nul et une bijection $u : \{1, 2 \ldots, n\} \to E$ (ceci revient à dire que $E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ où les éléments u_i sont deux à deux distincts ; on peut alors montrer qu'un tel entier n est unique et on l'appelle le cardinal de E).*

Le principe de récurrence permet d'obtenir (exercice) le résultat suivant :

Proposition 1.8.2. *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est fini et non vide a un plus petit et un plus grand élément.*

Exercice. Montrer que tout sous-ensemble d'un ensemble fini E est fini. (On pourra faire une récurrence sur le cardinal de E).
Montrer qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ est fini si et seulement si il existe un entier n tel que $E \subset \{0, 1, \ldots, n\}$.

Comparaison des entiers et des réels
On admet que le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des entiers naturels n'est majoré par aucun réel, ce qui équivaut à la propriété suivante :

> **Propriété d'Archimède :**
> Pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que $x < n$.

Exercice. Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. Démontrer les deux résultats suivants :

1. L'ensemble E a un plus petit élément.
2. Si E est majoré, il a un plus grand élément.

Ces deux propriétés sont-elles vérifiées dans $\mathbb{R}$? Et dans $\mathbb{Z}$?

Proposition 1.8.3. *Pour tout réel x, il existe un et un seul entier relatif k tel que $k \leq x < k+1$. Cet entier est noté $E[x]$ et l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto E[x]$ est appelée fonction partie entière.*

Démonstration. *Démonstration de l'existence.* Considérons d'abord le cas où $x \in \mathbb{R}_+$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier n_0 tel que $x < n_0$. L'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq x\}$ des entiers inférieurs ou égaux à x est contenu dans $\{0, 1 \ldots, n_0 - 1\}$ et contient 0, il est donc non vide et fini. Soit k le plus grand des éléments de E (qui existe, d'après la proposition 1.8.2). On a alors $k \leq x < k+1$.
Supposons maintenant $x \in \mathbb{R}_-$. On vient de voir qu'il existe un entier k' tel que $k' \leq -x < k'+1$. On obtient $-k'-1 < x \leq -k'$. Si $x = -k'$, on pose $k = -k'$ et sinon, on pose $k = -k'-1$; dans les deux cas, on a $k \leq x < k+1$.
Démonstration de l'unicité. Supposons maintenant, qu'il existe deux entiers k et k' tels que $k \leq x < k+1$ et $k' \leq x < k'+1$. On obtient $k \leq x < k'+1$, donc $k < k'+1$, soit $k \leq k'$. De même, $k' \leq x < k+1$, d'où $k' \leq k$. Finalement $k = k'$. Ceci prouve l'unicité de l'entier recherché. ∎

Remarque. On rencontre aussi les notations $[x]$ et $\lfloor x \rfloor$ pour la partie entière d'un réel x (et aussi la notation $\lceil x \rceil$ pour le plus petit entier $\geq x$).

Exercices.

1. Quelle est la partie entière de $-\pi$?
2. Tracer le graphe de la fonction partie entière.
3. Pour deux réels x et y quelconques, comparer $[x+y]$ et $[x]+[y]$.

Chapitre 2

Suites numériques

Dans cette section, on étudie les premières propriétés de convergence des suites réelles, puis complexes.

2.1 Définitions

Définition 2.1.1. *On appelle suite réelle toute application $n \mapsto u_n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est appelé terme d'indice n de la suite.*

Remarques.

1. Une suite est donc une fonction comme les autres. La notation (u_n) (plutôt que « $n \mapsto u(n)$ », ou simplement u) n'a aucune justification autre que la tradition.
2. Toutes les notions relatives aux fonctions réelles sur un ensemble s'appliquent en particulier aux suites : on sait par exemple ce qu'est une suite majorée (minorée, bornée).
3. Par extension, il arrive que l'on appelle « suite » une fonction réelle définie seulement sur l'ensemble des entiers $\geq n_0$, pour un certain entier n_0. On notera alors alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite.

Exemples.

1. Les termes de la suite peuvent être donnés par une formule, par exemple :
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos n$ ou $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n-1}{n^2+3}$.
2. On peut chercher à étudier les suites vérifiant une relation de récurrence, par exemple les suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$.
3. De même pour des récurrences à deux pas : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
4. On obtient souvent des suites quand on étudie l'évolution d'un système. Par exemple, si on lance une balle qui rebondit au sol, on peut se poser la question de savoir si la balle s'arrête au bout d'un certain temps ou si elle rebondit indéfiniment. Pour décrire l'évolution, on peut considérer la suite (t_n) des instants où la balle rebondit, et la suite (v_n) des vitesses de rebonds au sol. Pour que ces suites soient bien définies, on fera la convention que si la balle s'immobilise au bout de N rebonds, on pose pour $n \geq N$, $t_n = t_N$ et $v_n = 0$. Cette étude dépendra des hypothèses faites (élasticité, frottements, ..) et s'appuiera sur les lois de la physique.

Définition 2.1.2. *Soit (u_n) une suite réelle. Dire qu'elle est*

– *constante signifie que tous les termes de la suite sont égaux : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.
– *stationnaire signifie qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont égaux :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}).$$

– *périodique signifie qu'il existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+N} = u_n.$$

Remarque. La première propriété n'est qu'un cas particulier de la notion de fonction constante sur un ensemble quelconque. Il n'en va pas de même des deux autres : la notion de suite stationnaire utilise l'ordre sur $\mathbb{N}$, la notion de suite périodique utilise l'addition dans $\mathbb{N}$. Les notions de croissance qui suivent utilisent aussi l'ordre sur l'ensemble de départ.

Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction réelle sur E, on « rappelle » que f est dite *croissante* (resp. strictement croissante) si pour tout couple (x, y) d'éléments de E tel que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$). On dit que f est décroissante (resp. strictement décroissante) si $-f$ est croissante (resp. strictement croissante). On dit que f est monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Exercices.

1. Pourquoi a-t-on supposé que E est une partie de $\mathbb{R}$, plutôt qu'un ensemble quelconque ?
2. Vérifier que f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si

   pour tous x, y dans E, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$
   (resp. pour tous x, y dans E, si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$).
3. Montrer que « constante » équivaut à « croissante et décroissante ».

Dans le cas particulier des suites (i.e. $E = \mathbb{N}$) on a un critère très commode :

Proposition 2.1.3. *Soit* (u_n) *une suite réelle. Pour que* u *soit croissante (resp. décroissante, strictement croissante, strictement décroissante), il faut et il suffit que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on ait* $u_n \leq u_{n+1}$, *(resp.* $u_{n+1} \leq u_n$, $u_n < u_{n+1}$, $u_{n+1} < u_n$*).*

Démonstration. La partie « il faut » est triviale puisque l'on a toujours $n < n+1$. Réciproquement, supposons que

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$$

et montrons que u est strictement croissante (les autres cas sont entièrement analogues). Soient donc p et q deux entiers naturels tels que $p < q$: il s'agit de voir que $u_p < u_q$. On peut écrire $q = p + 1 + k$, où $k \in \mathbb{N}$: montrons alors par récurrence sur k la propriété

$$(P_k) \qquad \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_p < u_{p+1+k}.$$

Initialisation : la propriété (P_0) n'est autre que $(*)$, elle est donc vérifiée.
Hérédité : supposons que $k > 0$ et que (P_{k-1}) soit vérifiée. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a alors $u_p < u_{p+k}$ d'après (P_{k-1}), et d'autre part $u_{p+k} < u_{p+k+1}$ d'après $(*)$, d'où $u_p < u_{p+1+k}$ par transitivité. Ainsi (P_k) est démontrée, cqfd. ■

Exercices.
- Écrire à l'aide de quantificateurs la définition d'une suite non majorée (resp. non minorée, non

bornée).
- On considère la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}).$$

Vérifier qu'il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette relation et telle que $u_0 = 2$. Etudier l'éventuelle monotonie de (u_n) et montrer que (u_n) est bornée.

2.2 Suites convergentes

Définition 2.2.1. *Soit u une suite réelle.*

1. *On dit que u tend (ou converge) vers 0 (ou que u a pour limite 0) si un intervalle ouvert arbitrairement petit centré en 0 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, c'est-à-dire, formellement :*

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon).$$

2. *On dit que u converge vers un réel ℓ (ou tend vers ℓ, ou a pour limite ℓ) si la suite $u - \ell$ tend vers 0.*
3. *On dit que u converge s'il existe un réel ℓ tel que u tende vers ℓ.*

Exemples

1. Une suite constante ou stationnaire est convergente (plus précisément, la suite constante de valeur ℓ a pour limite ℓ).
2. La suite $(\frac{1}{n+1})$ converge vers 0.
   En effet, fixons $\varepsilon > 0$. La propriété d'Archimède dit qu'il existe un entier n_0 tel que $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. On a alors pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$. D'où le résultat.
   (Cette propriété est en fait équivalente à celle d'Archimède.)

Remarques.

1. La définition montre que la convergence vers ℓ ne dépend pas des premiers termes de la suite : si deux suites u et v vérifient $u_n = v_n$ pour n assez grand, et si u tend vers ℓ, alors v tend vers ℓ.
2. Explicitement, dire que u tend vers ℓ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

   En d'autres termes, « un intervalle ouvert arbitrairement petit centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang » (dans la formule ci-dessus, il s'agit de l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$). La définition adoptée plus haut permet de se ramener au cas d'une limite nulle, souvent plus simple à manipuler.
3. En explicitant la « variable » n, on dit aussi que « u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ ». L'expression « u tend vers ℓ » est en fait une abréviation justifiée par le fait que pour les suites (contrairement à d'autres fonctions), la seule notion de convergence intéressante est celle-ci.

4. On peut remplacer l'inégalité stricte $|u_n| < \varepsilon$ de la définition de la convergence vers 0 par une inégalité large :

$$(**) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon).$$

   En effet, supposons cette formule vraie et fixons $\varepsilon > 0$; on « applique $(**)$ à $\frac{\varepsilon}{2}$ », ce qui donne un n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon)$. On en déduit $(*)$. La réciproque est immédiate. Même chose pour une limite ℓ quelconque.

5. On peut aussi remplacer les intervalles ouverts centrés en ℓ par les intervalles ouverts contenant ℓ (exercice).

Pour utiliser efficacement la notion de limite, il y a beaucoup de propriétés à démontrer (limite d'une somme, d'un produit, inégalités sur les limites. . .). Commençons par quelques conséquences immédiates de la définition, pour les suites convergeant vers 0 :

Proposition 2.2.2. *Soit u et v deux suites réelles.*

1. *On suppose que u tend vers 0. Soit r un réel* strictement positif. *Alors on a $u_n < r$ pour tout n assez grand (c'est-à-dire : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $u_n < r$ pour tout $n \geq n_0$).*
2. *Si u tend vers 0 et si $|v| \leq |u|$, alors v tend vers 0.*
3. *Pour que u tende vers 0, il faut et il suffit que $|u|$ tende vers 0.*

Démonstration. Pour l'assertion (1), il suffit d'appliquer la définition de la convergence « avec $\varepsilon = r$ » : pour tout n au moins égal à n_0 convenable, on a $|u_n| < r$ et *a fortiori* $u_n < r$.

Montrons l'assertion (2). Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme u tend vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $|u_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Pour un tel n, on a *a fortiori* $|v_n| < \varepsilon$, ce qui montre bien que v converge vers 0.

Enfin (3) résulte de (2) appliquée aux suites u et $|u|$. ∎

Remarque. On a évidemment la propriété symétrique de (1) : si s est un réel < 0, alors $u_n > s$ pour n assez grand. La démonstration est entièrement analogue ; on peut aussi déduire cette propriété de (1) appliquée à la suite $-u$ et à $r = -s$, puisque (3) montre notamment que si u tend vers 0 alors $-u$ tend vers 0.

2.3 Limites et inégalités

Proposition 2.3.1. *Soit u une suite tendant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et soit λ un réel $> \ell$. Alors on a $u_n < \lambda$ pour tout n assez grand.*

Démonstration. Cela résulte de 2.2.2 (1) en considérant la suite $u - \ell$ et le réel $\lambda - \ell$. ∎

Ici encore on a la propriété « symétrique » : si $\lambda < \ell$ alors on a $u_n > \lambda$ pour n assez grand.

On déduit de 2.3.1 une propriété importante de comparaison de limites :

Proposition 2.3.2. *Soient u et u' deux suites tendant respectivement vers des réels ℓ et ℓ'.*

1. *On suppose que $\ell < \ell'$. Alors on a $u_n < u'_n$ pour tout n assez grand.*
2. *On suppose que $u \leq u'$. Alors on a $\ell \leq \ell'$.*

Démonstration. (1) Choisissons un réel $\lambda \in]\ell, \ell'[$ (un tel λ existe vu l'hypothèse, par exemple $\lambda = \frac{\ell+\ell'}{2}$ convient). Appliquons 2.3.1 : comme u tend vers ℓ et que $\ell < \lambda$, il existe n_0 tel que l'on ait $u_n < \lambda$ pour tout $n \geq n_0$. De même, il existe n_1 tel que l'on ait $u'_n > \lambda$ pour tout $n \geq n_1$. Pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$ on aura donc ces deux propriétés, et donc $u_n < \lambda < u'_n$, d'où la conclusion.

(2) Sinon, on aurait $\ell' < \ell$ d'où une contradiction d'après (1). ∎

△ De façon imagée, on exprime 2.3.2 (2) en disant que « les inégalités larges passent à la limite ». Il n'en est pas de même des inégalités strictes : considérer par exemple les suites $(u_n) = (0)$ et $(v_n) = (\frac{1}{n+1})$.

Proposition et Définition 2.3.3. (Unicité de la limite) *Soit u une suite convergente. Alors u admet une seule limite.*

Ceci justifie de parler de <u>la</u> limite de la suite (si elle existe !) *et si ℓ est cette limite, de noter :*

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n.$$

Démonstration. Supposons que ℓ et ℓ' sont des limites de u. Appliquant 2.3.2 (2) avec $u = u'$: puisque u tend vers ℓ et u' vers ℓ' et que $u \leq u'$ (trivialement), on en déduit $\ell \leq \ell'$. En échangeant les rôles, on a aussi $\ell' \leq \ell$, d'où $\ell = \ell'$, cqfd. ∎

Exercices.
- Montrer que si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = |\ell|$.
- Ecrire la définition de « la suite (u_n) ne converge pas » avec des quantificateurs.

Proposition 2.3.4. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit u une suite convergente et soit ℓ sa limite. Alors il existe n_0 tel que $u_n \in]\ell - 57, \ell + 57[$ pour tout $n \geq n_0$ (bien entendu, vous pouvez refaire la démonstration en remplaçant 57 par ce que vous voudrez). Pour *tout* entier n, on a donc $u_n \in B := F \cup]\ell - 57, \ell + 57[$ où F est l'ensemble fini (donc borné) $\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}\}$. Il est clair que B est borné, d'où la conclusion. (Explicitement, on a $|u| \leq \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, |\ell| + 57\}$). ∎

2.4 Limites et opérations.

Commençons par le cas des suites tendant vers 0 :

Proposition 2.4.1. *Soient u et v deux suites réelles, et λ un nombre réel.*

1. *Si u et v tendent vers 0, alors $u + v$ tend vers 0.*
2. *Si u tend vers 0, alors λu tend vers 0.*
3. *Si u tend vers 0 et si v est bornée, alors uv tend vers 0.*

Démonstration. Montrons (1). Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$, qui sera donc $< \varepsilon$ dès que l'on aura $|u_n| < \varepsilon/2$ et $|v_n| < \varepsilon/2$. Par hypothèse, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_1, \quad |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\text{et} \qquad \forall n \geq n_2, \quad |v_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons alors $n_0 := \max(n_1, n_2)$. Pour tout $n \geq n_0$ on a alors à la fois $|u_n| < \varepsilon/2$ et $|v_n| < \varepsilon/2$, donc $|u_n + v_n| < \varepsilon$, cqfd.

Montrons (2). *Première démonstration :* il existe un entier naturel m tel que $|\lambda| \leq m$. Il suffit donc de montrer que mu tend vers 0 (puisque $|\lambda u| \leq |mu|$: ici on applique 2.2.2 (2)). Or cela résulte de (1) par récurrence sur m, en remarquant que $mu = (m-1)u + u$.

Deuxième démonstration (plus classique) : si $\lambda = 0$ l'assertion est immédiate. Sinon, soit $\epsilon > 0$ et choisissons n_0 tel que l'on ait $|u_n| < \varepsilon/|\lambda|$ pour tout $n \geq n_0$. Pour un tel n, on aura alors $|\lambda u_n| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$, cqfd.

Montrons (3). Soit $M \geq 0$ un réel tel que $|v| \leq M$. Alors on a $|uv| \leq Mu$ qui tend vers 0 d'après (2). Donc uv tend vers 0 d'après 2.2.2 (2). ∎

Théorème 2.4.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes, $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ On a les propriétés suivantes :*

1. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda\ell$;*
2. *$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell'$;*
3. *$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \ell \times \ell'$;*
4. *si $\ell \neq 0$, on a $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0 et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq n_0} = \frac{1}{\ell}$.*

Démonstration. Posons $u' := u - \ell$ et $v' := v - \ell'$: par hypothèse les suites u' et v' tendent vers 0.

(1) Comme u' tend vers 0, la suite $\lambda u' = \lambda u - \lambda\ell$ tend vers 0 d'après 2.4.1 (2). Donc λu tend vers $\lambda\ell$, comme annoncé. La preuve de (2) est analogue en appliquant 2.4.1 (1) aux suites u' et v'.

Pour (3), on remarque que $uv = (\ell + u')(\ell' + v') = \ell\ell' + \ell v' + \ell' u' + u'v'$. Les suites $\ell v'$ et $\ell' u'$ tendent vers 0 en vertu de 2.4.1 (2), et $u'v'$ aussi par 2.4.1 (3) (toute suite convergente est bornée). Donc $uv - \ell\ell' = \ell v' + \ell' u' + u'v'$ tend vers 0, d'où le résultat.

(4) Supposons pour fixer les idées que $\ell > 0$. Alors $\ell/2 < \ell$, donc pour $n \geq n_0$ convenable on a $u_n > \ell/2$ (2.3.1) et en particulier $u_n \neq 0$. Dans la suite on supposera cette condition vérifiée. On a aussi $0 < 1/u_n < 2/\ell$ de sorte que la suite $1/u_n$ (définie pour $n \geq n_0$) est bornée. Pour montrer qu'elle converge vers $1/\ell$, on remarque que

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = (\ell - u_n) \times \frac{1}{\ell u_n}.$$

Par hypohtèse, $\ell - u_n$ tend vers 0, et $\frac{1}{\ell u_n}$ est bornée puisque $\frac{1}{u_n}$ l'est. L'assertion résulte donc à nouveau de 2.4.1 (3). ∎

Théorème 2.4.3. Théorème des gendarmes.
Soient trois suites réelles u, v et w telles que

$$\begin{cases} v \leq u \leq w \\ v \text{ et } w \text{ convergent vers une même limite } \ell. \end{cases}$$

Alors u converge vers ℓ.

Démonstration. En retranchant ℓ aux trois suites (ce qui préserve les inégalités postulées), on est ramené au cas où $\ell = 0$. Les inégalités impliquent $|u| \leq \max(|v|, |w|) \leq |v| + |w|$, d'où le résultat. ■

Exercice. Voici une « démonstration fausse » du théorème des gendarmes :
« Puisque les inégalités larges passent à la limite, on a $\ell \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \ell$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, cqfd. »
Où est l'erreur ?

2.5 Utilisation de sous-suites

Soit (u_n) une suite réelle. On considère souvent les deux suites (v_n) et (w_n) définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Les suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ sont respectivement appelées sous-suite des termes d'indices pairs et sous-suite des termes d'indices impairs de (u_n).

Exemple. Considérons la suite $(u_n) = ((-1)^n)$. La sous-suite des termes d'indices pairs est la suite (v_n) constante, égale à (1), et celle des termes d'indices impairs est la suite (w_n) constante, égale à (-1).

Cette notion se généralise : soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application quelconque. Pour toute suite u, on fabrique une nouvelle suite qui n'est autre que l'application composée $u \circ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ envoyant n sur le réel $u_{\varphi(n)}$. Dans l'exemple ci-dessus, les deux sous-suites v_n et w_n correspondent respectivement à $\varphi_1(n) = 2n$ et $\varphi_2(n) = 2n + 1$.

Pour nos besoins (c'est-à-dire pour l'étude des limites) cette notion est trop générale. Par exemple l'application $\varphi = 0$ donne la suite $(u_0, u_0, u_0, \dots)$ que l'on ne veut certainement pas considérer comme une sous-suite de u. En revanche, de « bons » exemples sont les sous-suites $n \mapsto u_{n^2}$ ou $n \mapsto u_{2^n}$. La bonne définition est la suivante :

Définition 2.5.1. *Soit (u_n) une suite réelle. Une* sous-suite *de u est une suite v de la forme $n \mapsto v_n = u_{\varphi(n)}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application* strictement croissante.

Lemme 2.5.2. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

La démonstration, laissée en exercice, est immédiate par récurrence sur n. (On notera cependant que l'analogue pour les applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est faux !)

Proposition 2.5.3. *Soit u une suite réelle admettant une limite ℓ. Alors toute sous-suite de u converge vers ℓ.*

Démonstration. Soit v une sous-suite de u, définie par $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Montrons que v tend vers ℓ. Soit donc $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Montrons que ce même n_0 « convient pour v » : pour tout $n \geq n_0$, on a $\varphi(n) \geq n \geq n_0$ d'après le lemme 2.5.2, donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$ d'après le choix de n_0, cqfd. ■

Exemple. On déduit de cette proposition (et de l'unicité de la limite) que la suite $n \mapsto (-1)^n$ vue plus haut ne converge pas, puisqu'elle admet deux sous-suites n'ayant pas la même limite.

Dans le cas particulier des sous-suites « paire et impaire », on a une sorte de réciproque :

Proposition 2.5.4. *Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :*

(i) *La suite* (u_n) *admet* ℓ *pour limite.*

(ii) *Les deux sous-suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *admettent* ℓ *pour limite.*

Démonstration. On note toujours $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.L'implication (i)⇒(ii) est un cas particulier de 2.5.3.

Supposons que les sous-suites (v_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers ℓ, et montrons qu'il en est de même de u. Fixons donc $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe deux entiers n_0 et n_1 tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n \geq n_0 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$$

$$(n \geq n_1 \Rightarrow |w_n - \ell| < \varepsilon).$$

Posons $n_2 = \sup(2n_0, 2n_1 + 1)$ et soit $n' \in \mathbb{N}$, $n' \geq n_2$.
Si n' est pair, $n' = 2n$ avec $n \geq n_0$ et on a $u_{n'} = v_n$, donc $|u_{n'} - \ell| = |v_n - \ell| < \varepsilon$.
Si n' est impair, $n' = 2n + 1$ avec $n \geq n_1$ et on a $u_{n'} = w_n$, donc $|u_{n'} - \ell| = |w_n - \ell| < \varepsilon$.
Dans les deux cas, on a montré que $(n' \geq n_2 \Rightarrow |u_{n'} - \ell| < \varepsilon)$.
De tout ceci, on déduit que la suite u converge vers ℓ. ∎

Exemple. On définit une suite u par $u_{2n} = \frac{2n+3}{4n}$ et $u_{2n+1} = \frac{n-5}{2n+1}$. On obtient (voir le théorème 2.4.2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \frac{1}{2}$, donc (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Chapitre 3

Limites infinies.

3.1 Définitions.

Définition 3.1.1. *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite (ou tend vers) $+\infty$ (resp. $-\infty$) si*

$$\forall M \in \mathbb{R}_+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > M.$$
$$(resp.\quad \forall M \in \mathbb{R}_+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < -M).$$

Remarques.

1. Autrement dit pour $M > 0$ arbitrairement grand, tous les u_n à partir d'un certain rang sont dans la demi-droite $]M, +\infty[$ (resp. dans $]-\infty, -M[$).
2. Une suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) n'est pas majorée (resp. n'est pas minorée) : elle n'est donc pas convergente. On dit parfois qu'elle diverge vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).
3. La phrase « la suite u tend vers $+\infty$ », par exemple, doit être considérée comme une expression toute faite. Nous n'avons jamais *défini* $+\infty$ (ni $-\infty$) jusqu'à présent. Remarquer d'ailleurs que ces notations n'apparaissent pas dans la définition !
4. *La « droite réelle complétée »* $\widetilde{\mathbb{R}}$. Pour les manipulations de limites, il est cependant commode d'introduire deux symboles appelés $-\infty$ et $+\infty$ et de poser

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\,.$$

Il est alors possible de parler de « limite d'une suite dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ », sans avoir à distinguer les cas. On rappelle cependant qu'une suite convergente a, par définition, une limite *finie*, et les symboles $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres.

Exercices.

- Montrer que dans les définitions précédentes, on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges et aussi prendre $M \in \mathbb{R}$ au lieu de $M \in \mathbb{R}_+$.
- Vérifier qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus une limite dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (utiliser la remarque 2 ci-dessus). Ceci justifie l'écriture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ pour $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$.
- Généraliser la proposition 2.5.4 (limite d'une sous-suite) au cas où $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
- Donner un exemple de suite non majorée qui n'a pas pour limite $+\infty$.

3.2 Calculs sur les limites : premières propriétés.

Proposition 3.2.1. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$. Alors :*

1. *$u_n > 1$ pour tout n assez grand* (de sorte que $1/u_n$ est défini pour n assez grand).
2. *La suite u est minorée.*
3. *La suite $1/u$* (cf. propriété 1) *tend vers 0.*
4. *La suite $-u$ tend vers $-\infty$.*
5. (« théorème des gendarmes à l'infini ») *Soit v une suite vérifiant $v \geq u$. Alors v tend vers $+\infty$.*
6. *Pour tout réel a, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(a + u_n) = +\infty$.*
7. *Pour tout réel* strictement positif *c, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(cu_n) = +\infty$.*

Démonstration. L'assertion 1 résulte immédiatement de la définition 3.1.1 (qu'il suffit d'appliquer avec $M = 1$). Nous allons en déduire (2). En effet, choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 1$ pour tout $n \geq N$. Alors, pour *tout* entier n, le réel u_n appartient à l'ensemble $B := F \cup]1, +\infty[$ où F est l'ensemble fini $\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}\}$. On a donc $u_n \geq \min(1, u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$, d'où l'assertion (2). (Noter l'analogie avec la proposition 2.3.4).
Montrons (3). Gardons N comme ci-dessus (donc $1/u_n$ a un sens pour tout $n \geq N$), et soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour chaque $n \geq N$, la condition « $|1/u_n| < \varepsilon$ » est équivalente, puisque $u_n > 0$, à « $u_n > 1/\varepsilon$ ». Or par hypothèse il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n > 1/\varepsilon$ (appliquer la définition 3.1.1 avec $M = 1/\varepsilon$). On aura donc $|1/u_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq \max(N, n_0)$, d'où la conclusion.
Les assertions 4 et 5 sont laissées comme exercices au lecteur. Montrons (6) : soit donc $M > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n > M - a$, ce qui implique que $a + u_n > M$, cqfd.
Montrons (7) : soit donc $M > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n > M/c$, ce qui implique que $cu_n > M$, cqfd. (Où a-t-on utilisé l'hypothèse sur c ?) ∎

Exercice. Énoncer et démontrer l'analogue de la proposition 3.2.1 pour les suites tendant vers $-\infty$.

On a une réciproque partielle à 3.2.1 (3) :

Proposition 3.2.2. *Soit u une suite réelle tendant vers 0 et* strictement positive *(resp. strictement négative). Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1/u_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas positif (l'autre est entièrement analogue, et d'ailleurs peut s'en déduire en utilisant 3.2.1 (4)). On veut montrer que $1/u$ tend vers $+\infty$: soit donc M un réel > 0. Puisque M et tous les u_n sont > 0, l'inégalité $1/u_n > M$ est équivalente à $u_n < 1/M$, et même à $|u_n| < 1/M$; or par hypothèse (en appliquant la définition 2.2.1 avec $\varepsilon = 1/M$) il existe bien un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $|u_n| < 1/M$ et donc aussi $1/u_n > M$, cqfd. ∎

Remarque. La condition de signe est évidemment essentielle. D'abord, pour que $1/u$ ait un sens il faut bien supposer que $u_n \neq 0$, au moins pour n assez grand. Même dans ce cas, la suite u définie par $u_n = (-1)^n/(n+1)$ tend vers 0 et est à termes non nuls, mais la suite $1/u$ n'a pas de limite dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.

3.3 Calculs dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Pour faciliter les calculs sur les limites, il est pratique de *définir* dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ une relation d'ordre total $\leq$, une addition et une multiplication prolongeant celles de $\mathbb{R}$. On fera toutefois attention que l'addition et la multiplication dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ *ne sont pas partout définies*.

Commençons par l'ordre. Soient a et b dans $\widetilde{\mathbb{R}}$. On dit, *par définition*, que $a \leq b$ si l'on est dans l'un des cas suivants :
- a et b sont finis (i.e. dans $\mathbb{R}$) et $a \leq b$ au sens usuel ;
- $a = -\infty$ (et b est quelconque) ;
- $b = +\infty$ (et a est quelconque).

En d'autres termes, on impose que $-\infty < a < +\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On voit tout de suite que c'est une relation d'ordre total sur $\widetilde{\mathbb{R}}$, qui admet $+\infty$ comme plus grand élément et $-\infty$ comme plus petit élément.

Ensuite on étend l'addition et la multiplication usuelles de $\mathbb{R}$ en deux opérations de même nom dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, commutatives (mais partiellement définies), par les tableaux suivants, dans lesquels ND signifie « non défini » (on parle aussi de « formes indéterminées ») :

$a+b$?	$a=-\infty$	$a \in \mathbb{R}$	$a=+\infty$
$b=-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND
$b=+\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$

ab ?	$a<0$	$a=0$	$a>0$
$b=-\infty$	$+\infty$	ND	$-\infty$
$b=+\infty$	$-\infty$	ND	$+\infty$

Enfin on étend la fonction « inverse » à $\widetilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ en posant (toujours par définition) :

$$\boxed{\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0.}$$

(Attention : l'inverse de 0 n'est toujours pas défini !)

3.4 Application aux calculs de limites.

Proposition 3.4.1. *On considère deux suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et deux éléments ℓ et ℓ' de $\widetilde{\mathbb{R}}$ tels que :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'.$$

Alors :

1. *Si $u \leq v$, alors $\ell \leq \ell'$.*
2. *Si $\ell + \ell'$ est défini, alors $u + v$ tend vers $\ell + \ell'$.*
3. *Si $\ell\ell'$ est défini, alors uv tend vers $\ell\ell'$.*
4. *Si $1/\ell$ est défini* (c'est-à-dire si $\ell \neq 0$), *alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand, et $\lim_{n\to+\infty}(1/u_n) = 1/\ell$.*

Démonstration. Si ℓ et ℓ' sont finies, ce n'est pas nouveau. On supposera donc désormais que ℓ ou ℓ' est infinie.
(1) : si $\ell = -\infty$ ou $\ell' = +\infty$, l'inégalité $\ell \leq \ell'$ est toujours vraie. Il ne reste que les cas $\ell = +\infty$, qui résulte de 3.2.1 (5), et $\ell' = -\infty$ qui s'en déduit en prenant les suites opposées.
Pour les deux autres assertions on peut supposer, quitte à passer aux suites opposées, que ℓ ou ℓ' vaut $+\infty$; par symétrie on supposera même que $\ell = +\infty$.
(2) : le cas $\ell' = -\infty$ est exclu (forme indéterminée), et donc la suite v est minorée (par 2.3.4 si $\ell' \in \mathbb{R}$, et par 3.2.1 (2) si $\ell' = +\infty$) : il existe une constante a telle que $v \geq a$, et la suite $u + a$ tend vers $+\infty$ par 3.2.1 (6) donc $u + v$ aussi par 3.2.1 (5).
(3) : le cas $\ell' = 0$ est exclu (forme indéterminée), donc quitte à changer v en $-v$ on peut supposer que $\ell' > 0$. Choisissons un réel c tel que $0 < c < \ell'$. Alors, pour n assez grand, on a $v_n > c$ et $u_n > 0$, donc $u_n v_n > c u_n$. D'après 3.2.1 (7), la suite $c u_n$ tend vers $+\infty$, on conclut donc par 3.2.1 (5).
(4) : c'est la proposition 3.2.1 (3). ■

Exemples dans le cas où $\ell = +\infty, \ell' = -\infty$.

(i) Exemple où $u + v$ n'a pas de limite : $u_n = n$, $v_n = -n + (-1)^n$;

(ii) exemple où $u + v$ tend vers $+\infty$: $u_n = n^2$, $v_n = -n$;

(iii) exemple où $u + v$ tend vers $-\infty$: $u_n = n$, $v_n = -n^2$;

(iv) exemple où $u + v$ tend vers $a \in \mathbb{R}$ (fixé arbitrairement) : $u_n = n$, $v_n = a - n$.

Exercice. Refaire les démonstrations de 3.4.1 directement, en partant dans chaque cas de la définition d'une limite. Dans le cas des formes indéterminées, donner des exemples illustrant les différentes possibilités.

Des méthodes pour calculer des limites :

(i) Majorer ou minorer la suite pour se ramener à une suite plus simple :
$|\frac{\sin n}{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n+1} = 0$.

(ii) Mettre en évidence les termes prépondérants pour « lever les indéterminations » :
$\frac{n^2+1}{n^2+3n-1} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2+3n-1} = \frac{1+0}{1+0-0} = 1$.

On verra d'autres méthodes plus loin (chapitre 5).

Chapitre 4

Exemples importants

4.1 Suites arithmétiques.

Définition 4.1.1. *Soient a et b deux réels. La* suite arithmétique *de raison a et de terme initial b est la suite*

$$n \in \mathbb{N} \quad \longmapsto \quad u_n = b + na.$$

Bien entendu on a $u_0 = b$. Pour $b = 0$ et $a = 1$, on obtient la suite des entiers naturels $(u_n) = (n)$. La somme de ses $n+1$ premiers termes, c'est-à-dire la somme des n premiers entiers est donnée par la formule (à connaître ou à savoir retrouver) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Exercices.

1. Montrer qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique de raison a si et seulement si elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, u_{n+1} = u_n + a.$$

2. Calculer la somme des n premiers termes (n dlonné) d'une suite arithmétique quelconque, directement ou à partir du cas particulier ci-dessus. (On fera attention au sens de l'expression « les n premiers termes » !)

4.2 Suites géométriques.

Définition 4.2.1. *Soient c et q deux réels. La* suite géométrique *de raison q et de terme initial c est la suite*

$$n \in \mathbb{N} \quad \longmapsto \quad u_n = cq^n.$$

Remarque. On rappelle que $q^0 = 1$ pour tout $q \neq 0$. La « bonne » convention ici (en particulier pour la proposition 4.2.3) est de poser $q^0 = 1$ même si $q = 0$. Ceci dit, le cas $q = 0$ n'est pas très intéressant...

Exercice. Montrer qu'une suite (u_n) est une suite géométrique de raison q si et seulement si elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = qu_n.$$

Proposition 4.2.2. *Soit $q \in \mathbb{R}$.*

(i) *Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante et égale à 1.*

(ii) *Si $q > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*

(iii) *Si $|q| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.*

(iv) *Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a aucune limite dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. (ii) Posons $q = 1 + a$, où $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule du binôme donne :

$$q^n = (1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k = 1 + na + \ldots + a^n.$$

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n \geq 1 + na$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ d'après la proposition 3.2.1 (5). (Au lieu d'utiliser la formule du binôme, on aurait pu aussi démontrer l'inégalité $(1+a)^n \geq 1 + na$ par récurrence sur n).

(iii) Posons $q' = |\frac{1}{q}|$. On a $q' > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q'^n = +\infty$, d'après (ii). Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|q^n| = \frac{1}{q'^n}$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $q^n = (-1)^n |q|^n$. Donc, d'après les cas précédents, la sous-suite des termes d'indice pair (q^{2n}) (resp. celle des termes d'indice impair (q^{2n+1})) a pour limite $+1$ ou $+\infty$ (resp. -1 ou $-\infty$) suivant que $q = -1$ ou $q < -1$. Ces deux sous-suites n'ont donc pas la même limite, cqfd. ∎

Proposition 4.2.3. *Soit $q \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$S_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Le cas $q = 1$ est évident. Pour q quelconque et $n \in \mathbb{N}$, on écrit $S_n = 1 + q + \ldots + q^n$ et $qS_n = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$, d'où en faisant la différence et en simplifiant :

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1},$$

formule vraie même si $q = 1$ (mais pas très glorieuse dans ce cas). Si $q \neq 1$; il suffit de diviser par $1 - q$ pour obtenir le résultat. ∎

Exercice. Redémontrer 4.2.3 par récurrence sur n.

4.3 Suites de puissances (entières).

Proposition 4.3.1. *Soit $p \in \mathbb{Z}$. Considérons la suite $(n^p)_{n\geq 1}$ des puissances p-èmes des entiers naturels.*

(i) *Si $p = 0$, cette suite est constante, égale à 1.*

(ii) *Si $p > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.*

(iii) *Si $p < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = 0$.*

Démonstration. (i) est évident.
(ii) Supposons $p > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n^p = n^{p-1} \times n \geq n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. D'où le résultat d'après la proposition 3.2.1 (5).
(iii) Supposons $p < 0$ et notons $p' = -p$. D'après (ii), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{p'} = +\infty$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p = \frac{1}{n^{p'}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = 0$, d'après la proposition 3.2.1 (3). ■

4.4 Comparaison des suites géométriques et des suites de puissances.

Quand on multiplie une suite géométrique par une suite de puissances de n, on aboutit parfois à des formes indéterminées. La proposition suivante permet de lever ces indéterminations.

Proposition 4.4.1. *Soit $q \in \mathbb{R}_+$ et $p \in \mathbb{N}^*$.*

(i) *Si $q > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^p} = +\infty$.*

(ii) *Si $0 \leq q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n n^p = 0$.*

Démonstration. (i) Supposons $q > 1$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$, d'où une forme indéterminée. On considère deux cas.
Cas $p = 1$. Comme dans la démonstration de la proposition 4.2.2, si l'on écrit $q = 1+a$ (donc $a > 0$) et si l'on utilise la formule du binôme, on obtient pour tout entier $n \geq 2$:

$$q^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \ldots + a^n > \frac{n(n-1)}{2}a^2$$

donc $\frac{q^n}{n} > \frac{n-1}{2}a^2$. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n} = +\infty$.
Cas général. On se ramène au cas précédent en « sortant l'exposant p » : on remarque que

$$\frac{q^n}{n^p} = \left(\frac{q^{n/p}}{n}\right)^p = \left(\frac{r^n}{n}\right)^p$$

où l'on a posé $r = q^{1/p}$. Puisque $r > 1$, le cas précédent montre que $\frac{r^n}{n}$ tend vers $+\infty$, et il en est donc de même de $\left(\frac{r^n}{n}\right)^p$ (les résultats sur le produit de deux suites s'étendent au produit de p suites).
(ii) Supposons $0 < q < 1$ et posons $q' = \frac{1}{q}$; comme $1 < q'$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q'^n}{n^p} = +\infty$, c-à-d. $\lim \frac{1}{q^n n^p} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n n^p = 0$, d'après la proposition 3.2.1 (3). En étudiant les autres cas, on arrive au résultat :

$$\boxed{\text{Pour } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{R}_+,\ q \neq 1, \text{ les suites } (q^n n^p)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (q^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ont même limite.}}$$

Chapitre 5

Limites de suites et limites de fonctions.

5.1 Utilisation des fonctions continues

Définition 5.1.1. *Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Dire que f a pour limite ℓ en a signifie que les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de ℓ quand x est suffisamment proche de a, ou encore qu'un intervalle ouvert arbitrairement petit centré en ℓ contient tous les $f(x)$ dès que x est dans un intervalle ouvert centré en a suffisamment petit, soit*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

On a des résultats entièrement analogues à ceux obtenus plus haut pour les limites de suites (à l'exception de la composition des limites, qui est une nouveauté) :

Proposition 5.1.2. *Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, $a \in \overline{I}$, f, g et h des fonctions réelles définies sur I, ℓ et ℓ' des réels. On suppose que f (resp. g) tend vers ℓ (resp. ℓ') en a. Alors :*

1. *Si $f \leq g$, alors $\ell \leq \ell'$;*
2. (unicité de la limite) *si $f = g$, alors $\ell = \ell'$;*
3. *$f + g$ (resp. fg) tend vers $\ell + \ell'$ (resp. vers $\ell\ell'$) en a ;*
4. (théorème des gendarmes) *si $f \leq h \leq g$, et si $\ell = \ell'$, alors h tend vers ℓ en a ;*
5. *si $\ell \neq 0$, alors :*
   - *$f(x) \neq 0$ « pour tout $x \in I$ assez proche de a », c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert J centré en a tel que f ne s'annule pas sur $I \cap J$;*
   - *pour J comme ci-dessus, la fonction $1/f$ (qui est définie sur $I \cap J$) tend vers $1/\ell$ en a. (Noter que l'on a $a \in \overline{I \cap J}$, de sorte que cette assertion a un sens).*

On suppose maintenant que f est à valeurs dans un intervalle J, et que φ est une fonction réelle définie sur J. Alors :

6. *$\ell \in \overline{J}$;*
7. (composition des limites) *si φ a une limite m en ℓ (ce qui a un sens d'après (6)), alors la fonction composée $\varphi \circ f$ tend vers m en a.* ■

De façon imagée (et plus facile à retenir !), on exprime (7) en disant : « si $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a, et si $\varphi(y)$ tend vers m lorsque y tend vers ℓ, alors $\varphi(f(x))$ tend vers m lorsque x tend vers a ». Noter cependant que l'apparence « évidente » de cet énoncé est trompeuse car les phrases telles que « x tend vers a » ou « $\varphi(y)$ tend vers m », prises isolément, n'ont aucun sens !

Nous utiliserons librement toutes ces propriétés, qui ne sont pas l'objet de ce cours. Les démonstrations sont d'ailleurs entièrement analogues à celles vues dans le cas des suites ; en gros, l'idée est toujours de remplacer « pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand » par « pour $x \in I$ assez proche de a ».

Définition 5.1.3. (fonction continue). *Soient I un intervalle réel, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, et x_0 un point de I.*
On dit que f est continue en x_0 *si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. *On dit que f est* continue sur I *si elle est continue en tout point de I.*

On déduit immédiatement de 5.1.2 la proposition suivante :

Proposition 5.1.4. *La somme, les combinaisons linéaires, le produit de deux fonctions continues sur I sont des fonctions continues sur I. Le quotient $\frac{f}{g}$ de deux fonctions continues sur I dont le dénominateur g ne s'annule pas sur I est continu sur I. Si $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ est continue et si $g : J \to \mathbb{R}$ est continue, alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue.*

Rappelons aussi qu'une fonction dérivable est continue.

Exemples. Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$, ainsi que les fractions rationnelles sur leur domaine de définition. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction exponentielle. La fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la « fonction puissance » $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (définie par $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$) est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Revenons aux suites. L'énoncé qui suit est analogue à la composition des limites vue en 5.1.2 (7) :

Proposition 5.1.5. *Soient I un intervalle, $a \in \overline{I}$ et (u_n) une suite à valeurs dans I (c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$). On suppose que u converge vers a.*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

(1) On suppose que f a une limite ℓ en a. Alors la suite $f \circ u : n \mapsto f(u_n)$ converge vers ℓ.

(2) On suppose que $a \in I$ et que f est continue en a. Alors la suite $f \circ u : n \mapsto f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

Démonstration. L'assertion (2) est évidemment un cas particulier de (1). Il suffit donc de montrer (1). Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

Pour un tel $\alpha > 0$, l'hypothèse « $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ » permet de choisir un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - a| < \alpha.$$

On a trouvé $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |f(u_n) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Ceci pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. D'où le résultat. ∎

Remarque. Dans l'énoncé de 5.1.5, l'hypothèse que $a \in \overline{I}$ est en fait une conséquence du fait que u converge vers a et est à valeurs dans I (exercice).

Exemple. On a $\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$.

La proposition 5.1.5 admet une réciproque :

Proposition 5.1.6. (« les limites de fonctions se testent avec des suites ») *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, et $\ell \in \mathbb{R}$.*

On suppose que **pour toute suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans I telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$. Alors on a $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.*

Démonstration. On montre la proposition contraposée de celle annoncée. Supposons donc que f ne tend pas vers ℓ en a. Nous allons construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a, mais telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers ℓ.
L'hypothèse sur f nous dit qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x_\alpha \in I$ tel que

$$|x_\alpha - a| < \alpha \text{ et } |f(x_\alpha) - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$: pour définir le terme u_n de notre suite, on applique la propriété précédente avec $\alpha = \frac{1}{n+1}$. Posant donc $u_n = x_{1/(n+1)}$, on obtient :

$$|u_n - a| < \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(u_n) - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

La suite (u_n) converge donc vers a, puisque $|u_n - a| < \frac{1}{n+1}$ pour tout n. En revanche, la suite $(|f(u_n) - \ell|)$ ne tend pas vers 0 (elle est minorée par $\varepsilon_0 > 0$) donc $(f(u_n))$ ne tend pas vers ℓ, cqfd.
■

Remarque sur la définition des limites de fonctions. Reprenons les notations de la définition 5.1.1, et supposons de plus que $a \in I$. Dans ce cas, certains ouvrages donnent une définition différente d'une limite en « excluant a », c'est-à-dire en remplaçant « $\forall x \in I$ » par « $\forall x \in I \setminus \{a\}$ ». Par exemple, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a une limite en 0 (à savoir 0) chez ces auteurs, mais *n'en a pas* avec notre définition. En fait, on vérifie facilement (exercice !) que si $a \in I$ et si f a pour limite ℓ en a, alors on a nécessairement $\ell = f(a)$ (en effet, en appliquant la définition avec $x = a$, on conclut que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|f(a) - \ell| < \varepsilon$).

Noter que l'assertion 7 (composition des limites) de la proposition 5.1.2 serait fausse avec « l'autre » définition d'une limite : on trouve un contre-exemple en prenant pour φ la fonction ci-dessus, et pour f la fonction nulle.

5.2 Intervalles dans $\widetilde{\mathbb{R}}$

La notion d'intervalle se généralise de façon évidente à $\widetilde{\mathbb{R}}$: outre les intervalles de $\mathbb{R}$, on dispose maintenant des intervalles $[a, +\infty]$, $[-\infty, a[$, etc. Nous utiliserons surtout ces intervalles dans le contexte suivant : partant d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on a déjà défini $\overline{I}$ en ajoutant à I ses extrémités *dans* $\mathbb{R}$. Nous noterons $\widetilde{I}$ la réunion de I et de ses extrémités *dans* $\widetilde{\mathbb{R}}$, donc éventuellement infinies. Par exemple, si $I =]0, +\infty[$, alors $\overline{I} = [0, +\infty[$ et $\widetilde{I} = [0, +\infty]$. Ce sera commode pour énoncer ci-dessous des propriétés de « passage à la limite » dans I, sans avoir à distinguer à chaque fois entre les limites finies et infinies.

5.3 Généralisation : limites de fonctions, infinies ou à l'infini

Définition 5.3.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, $a \in \widetilde{I}$ et $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Dire que $f(x)$ a pour limite L quand x tend vers a signifie, suivant les cas :*

(i) Cas $a \in \mathbb{R}$ et $L = +\infty$ (limite $+\infty$ en un point réel) :
« $f(x)$ est arbitrairement grand quand x est suffisamment proche de a », soit

$$\forall M > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > M).$$

(ii) Cas $a = +\infty$ et $L \in \mathbb{R}$ (limite finie en $+\infty$)
« $f(x)$ est arbitrairement proche de L quand x est suffisamment grand », soit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, (x > A \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

(iii) Cas $\ell = +\infty$ et $L = +\infty$ (limite $+\infty$ en $+\infty$)
« $f(x)$ est arbitrairement grand quand x est suffisamment grand », soit

$$\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, (x > A \Rightarrow f(x) > M).$$

On a des définitions analogues en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

Remarque. Dans tous les cas, si $f(x)$ admet une limite L quand x tend vers a, on peut montrer que cette limite est unique et ceci justifie la notation $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Exemples. Retenir

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.}$$

La proposition 5.1.5 se généralise (avec une démonstration analogue), ainsi que sa réciproque 5.1.6 :

Proposition 5.3.2. *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, $a \in \widetilde{I}$ et $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$.*

1. *Soit (u_n) une suite à valeurs dans I. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = L$.*
2. *Réciproquement, supposons que pour toute suite $u : \mathbb{N} \to I$ ayant pour limite a, on ait $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = L$. Alors f a pour limite L en a.* ∎

Exemples
(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\exp n}{n} = +\infty$.
(ii) *Fonctions puissances.*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$. En utilisant les limites des fonctions $\ln$ et $\exp$ à l'infini, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = 1$ si $\alpha = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$, si $\alpha > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$, si $\alpha < 0$. Ceci généralise la proposition 4.3.1.
(iii) *Comparaison des exponentielles et des puissances.*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q > 0$. On peut écrire (en passant à la forme exponentielle et en mettant le terme prépondérant n en facteur) : $n^\alpha q^n = \exp[n(\alpha \frac{\ln n}{n} + \ln q)]$. En utilisant $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, on obtient :

$$\boxed{\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } q \in \mathbb{R}_+, q \neq 1, \text{ les suites } (n^\alpha q^n) \text{ et } (q^n) \text{ ont même limite éventuelle.}}$$

Ceci généralise les résultats de 4.4.1.

5.4 Utilisation de dérivées

Définition 5.4.1. (fonction dérivable) *Soient I un intervalle réel, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, et x_0 un point de I.*
On dit que f est dérivable en x_0 *si la limite* $\lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existe ; cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.*
On dit que f est dérivable sur I *si elle est dérivable en tout point de I ; la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est alors appelée fonction dérivée de f.*

Exemples Si l'on admet que $\sin' = \cos$, on a $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, c-à-d. par définition $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \cos 0 = 1$; de même $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \ln'(1) = 1$. Retenir :

$$\boxed{\lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.}$$

Par exemple, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; comme $n \sin(\frac{1}{n}) = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$, on en déduit

$$\lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Voici une application utile :

Proposition 5.4.2. *Pour tout réel x, on a*

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n = e^x.}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$: ainsi, u est une suite définie sur $\mathbb{N}^*$, et dépendant de x (qui est une donnée de l'énoncé).

L'idée est de « passer au logarithme » ; pour cela il faut s'assurer que $u_n > 0$, ce qui est vrai pour n assez grand — à savoir, explicitement, pour $n > |x|$, ce qu'on supposera dans la suite. Sous cette hypothèse, on a donc $u_n = e^{v_n}$ où $v_n = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$. Par continuité de l'exponentielle, il suffit donc de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = x$. Si l'on pose $h_n := \frac{x}{n}$, on a

$$v_n = n \ln(1 + h_n) = x \frac{\ln(1 + h_n)}{h_n}.$$

Alerte ! Ceci n'a pas de sens lorsque h_n est nul, ce qui arrive si et seulement si $x = 0$. Mais dans ce cas la proposition est triviale (vérifiez !). On suppose donc que $x \neq 0$ et donc $h_n \neq 0$; notre formule est donc valable. D'après le résultat précédant la proposition (et le fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = 0$), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+h_n)}{h_n} = 1$, d'où le résultat. ∎

Chapitre 6

Suites complexes

6.1 Les nombres complexes.

L'ensemble des nombres complexes est, comme $\mathbb{R}$, muni d'une addition et d'une multiplication, qui en font un corps commutatif. En revanche, la relation d'inégalité ne se prolonge pas à $\mathbb{C}$. Les propriétés de $\mathbb{R}$ vues en 1.2, qui ne dépendent pas de cette relation, mais seulement de l'addition et de la multiplication, s'étendent sans difficulté à $\mathbb{C}$.
Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit sous forme cartésienne $z = a + ib$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Cette écriture est unique, de sorte que a et b méritent des noms : ce sont respectivement la *partie réelle* et la *partie imaginaire* de z. Notations : $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.
Pour $z = a + ib$ comme ci-dessus, on définit son *module* $|z|$ par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et son *conjugué* $\overline{z}$ par $\overline{z} = a - ib$.
On rappelle les formules (où z et w sont des nombres complexes quelconques) :

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z), \quad z\,\overline{z} = |z|^2, \quad |z\,w| = |z|\,|w|$$

et les inégalités triangulaires

$$|z + w| \leq |z| + |w|; \qquad |z - w| \geq |z| - |w|.$$

Si $z \neq 0$, z s'écrit sous forme polaire $z = |z|e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$; dans ce cas, on a aussi pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$; les nombres $\theta + 2k\pi$ sont appelés arguments de z.
Exemples. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Les notions de partie majorée ou minorée de $\mathbb{R}$ n'ont pas d'analogue dans $\mathbb{C}$. On dit, en revanche, qu'une partie X de $\mathbb{C}$ est *bornée* si la fonction réelle $z \mapsto |z|$ est bornée sur X. Il revient au même de dire qu'il existe un réel R (strictement positif, si l'on veut) tel que $|z| \leq R$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, ou encore, que X est contenu dans un disque centré en 0 du plan complexe.

Compte tenu des inégalités

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|, \qquad |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|,$$

valables pour tout $z \in \mathbb{C}$ (la troisième résulte de l'inégalité triangulaire), on voit que X est bornée si et seulement si les fonctions Re et Im sont bornées sur X.

Si E est un ensemble quelconque et f une fonction à valeurs complexes sur E (c'est-à-dire une application de E dans $\mathbb{C}$), on dit, comme dans le cas réel, que f est *bornée* si son image est bornée, c'est-à-dire s'il existe un réel $R > 0$ tel que $|f(x)| \leq R$ pour tout $x \in E$. Il revient au même de dire que la fonction réelle $|f|$ est bornée, ou encore que les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bornées (utiliser les inégalités ci-dessus). La notion de fonction complexe bornée sera notamment utilisée plus bas, dans le cas des suites.

6.2 Convergence des suites complexes.

Définition 6.2.1. *On appelle suite complexe toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.*

On utilise le même type de notations ($n \mapsto u_n$, etc.) que pour les suites réelles.

Définition 6.2.2. *Soit u une suite complexe.*

1. *On dit que la suite u tend (ou converge) vers 0 si la suite réelle $|u|$ (donnée par $n \mapsto |u_n|$) tend vers 0.*
2. *On dit que la suite u tend (ou converge) vers un nombre complexe ℓ si la suite $u - \ell$ converge vers 0* (autrement dit, d'après (1), si $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - \ell| = 0$).

Remarque. Dire que u tend vers ℓ veut donc dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Autrement dit, si on se donne un disque ouvert de centre ℓ arbitrairement petit, u_n appartient à ce disque dès que n est assez grand.

Exercice.
- Vérifier que si la suite u est réelle et si ℓ est réel, la phrase « u converge vers ℓ » a le même sens dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. (Autrement dit, la définition 6.2.2 ne contredit pas 2.2.1).

Proposition 6.2.3. *Soient u une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *u converge vers ℓ ;*
2. *la suite $\mathrm{Re}(u)$ converge vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et la suite $\mathrm{Im}(u)$ converge vers $\mathrm{Im}(\ell)$* (Remarquer qu'il s'agit de suites réelles !).

Démonstration. Posons $u' := u - \ell$. Alors la condition (1) équivaut à « u' tend vers 0 ». D'autre part on a $\mathrm{Re}(u') = \mathrm{Re}(u) - \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(u') = \mathrm{Im}(u) - \mathrm{Im}(\ell)$, donc la condition (2) équivaut à « $\mathrm{Re}(u')$ et $\mathrm{Im}(u')$ tendent vers 0 ».

Or on a les inégalités (déjà signalées dans 6.1) :

$$0 \leq |\mathrm{Re}(u')| \leq |u'|, \quad 0 \leq |\mathrm{Im}(u')| \leq |u'|, \qquad 0 \leq |u'| \leq |\mathrm{Re}(u')| + |\mathrm{Im}(u')|.$$

Si l'on suppose (1), alors $|u'|$ tend vers 0, donc $\mathrm{Re}(u')$ et $\mathrm{Im}(u')$ aussi d'après les deux premières inégalités et la proposition 2.2.2 (2) (ou le théorème des gendarmes). Donc (2) est vérifiée. Réciproquement, si (2) est satisfaite, alors la troisième inégalité implique de même que u' tend vers 0, cqfd. ∎

Exercice. Généraliser aux suites complexes :
– la proposition 2.3.3 (unicité de la limite) ;

– la proposition 2.3.4 (toute suite convergente est bornée) ;
– la notion de sous-suite et les propositions 2.5.3 et 2.5.4 ;
– le théorème 2.4.2 (opérations sur les limites).
(On conseille d'utiliser le cas réel et la proposition 6.2.3).

6.3 Suites géométriques complexes.

Définition 6.3.1. *Soit $q \in \mathbb{C}$. Comme dans le cas réel, on appelle suite géométrique de raison q une suite de la forme $(u_0 q^n)$ où $u_0 \in \mathbb{C}$.*

On généralise alors les propositions 4.2.2 et 4.2.3 :

Proposition 6.3.2. *Soit $q \in \mathbb{C}$.*

(i) *Si $q = 1$, alors (q^n) est constante.*

(ii) *Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.*

(iii) *Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée, donc ne converge pas.*

(iv) *Si $|q| = 1$, $q \neq 1$, la suite (q^n) ne converge pas.*

(v) *Si $q \neq 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

Démonstration. Pour (ii) et (iii), il suffit de remarquer que $|q^n| = |q|^n$.
(iv) supposons que $|q| = 1$ et que (q^n) converge vers un complexe ℓ. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = q \lim\limits_{n\to+\infty} q^n$, on a $q\ell = \ell$, soit $q = 1$ ou $\ell = 0$. Mais le cas $\ell = 0$ est exclu car la suite $|q^n|$ est égale à 1 donc ne tend pas vers 0. Donc $q = 1$.
La propriété (v) se démontre comme dans le cas réel. ∎

Chapitre 7

Suites réelles monotones

7.1 Majorants et limite d'une suite croissante convergente

Une suite réelle convergente est bornée. Pour les suites monotones, on a plus précisément :

Proposition 7.1.1. *Soit (u_n) une suite réelle. Si elle est croissante (resp. décroissante) et converge vers un réel ℓ, alors elle est majorée (resp. minorée) par ℓ.*

Attention ! La réciproque est (très) fausse : Si (u_n) est croissante et majorée par un réel ℓ, elle ne converge pas forcément vers ℓ (la preuve : tous les réels $\geq \ell$ sont aussi des majorants, alors que u a au plus une limite).

Démonstration. Supposons u croissante (le cas décroissant est laissé au lecteur), et montrons que $u \leq \ell$. Soit donc $n_0 \in \mathbb{N}$: il s'agit de voir que $u_{n_0} \leq \ell$. Or la sous-suite $n \mapsto u_{n_0+n}$ de u converge vers ℓ, et elle est $\geq u_{n_0}$. Passant à la limite, on en déduit que $\ell \geq u_{n_0}$.
Question. Peut-il arriver que $u_{n_0} = \ell$? Que peut-on dire dans ce cas sur la suite u ?
Variante. Le même raisonnement peut être présenté « par l'absurde » : supposons que u soit croissante et non majorée par sa limite ℓ. Il existe donc un entier n_0 tel que $\ell < u_{n_0}$. Mais pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n_0} > \ell$, ce qui contredit la proposition 2.3.1 (appliquée avec $\lambda = u_{n_0}$), ou encore la définition d'une limite (appliquée avec $\varepsilon = u_{n_0} - \ell$). ∎

Proposition 7.1.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors*

1. *Si (u_n) est croissante et non majorée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
2. *Si (u_n) est décroissante et non minorée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Démonstration. (1) Supposons que (u_n) soit croissante et non majorée. Fixons un réel M ; puisque M ne majore pas la suite, on peut choisir un entier n_M tel que $u_{n_M} > M$; la suite étant croissante, on a alors :

$$\forall n \geq n_M, \quad u_n \geq u_{n_M} > M.$$

Ceci pour M arbitrairement grand, ce qui revient à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(2) Si (u_n) est décroissante, on raisonne de même ou on considère la suite opposée $-u$. ∎

Remarque. Ces résultats sont faux pour des suites non monotones.

Exercice. Soit (u_n) une suite croissante, convergeant vers une limite réelle ℓ et soit ℓ' un réel tel que $\ell' < \ell$.

1. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $\ell' < u_n \leq \ell$ (autrement dit, on a $u_n > \ell'$ pour tout n assez grand).
2. Montrer que la limite ℓ est le plus petit des majorants de la suite.

7.2 Un critère de convergence

Une suite bornée n'est pas toujours convergente. Mais on admet que l'ensemble des réels vérifie la propriété fondamentale suivante :

Théorème 7.2.1. (admis) *Toute suite réelle croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente.*

Bien entendu le cas décroissant est conséquence du cas croissant (remplacer la suite envisagée par la suite opposée).

Remarque. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante, il y a donc deux possibilités :
- Si (u_n) est majorée, elle converge (dans $\mathbb{R}$).
- Si (u_n) n'est pas majorée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Même chose en remplaçant « croissante » par « décroissante », « majorée » par « minorée » et $+\infty$ par $-\infty$.
On voit donc notamment que *toute suite réelle monotone a une limite dans* $\widetilde{\mathbb{R}}$.

7.3 Suites adjacentes

Définition 7.3.1. *Dire que deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes signifie que l'une des suites est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.*

Remarque. Supposons par exemple (a_n) croissante et (b_n) décroissante. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_p. \tag{$*$}$$

En effet montrons d'abord que $a_n \leq b_n$ pour tout n (« cas $n = p$ ») : la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (puisque a et $-b$ le sont) et tend vers 0 donc est ≤ 0 d'après la proposition 7.1.1. Autrement dit, $a \leq b$.

Le cas général (n et p quelconques) s'en déduit : si $n \leq p$ alors $a_n \leq a_p \leq b_p$, et si $n \geq p$ alors $a_n \leq b_n \leq b_p$.

Théorème 7.3.2. (Théorème des suites adjacentes).
Si deux suites sont adjacentes, elles convergent dans $\mathbb{R}$ et leurs limites sont égales.

Démonstration. Soient a et b deux suites adjacentes, avec a croissante et b décroissante. D'après la remarque ci-dessus, la suite a est majorée (par n'importe quel terme de b, par exemple b_0). Elle a donc une limite ℓ. Comme $a - b$ tend vers 0, la suite b tend donc aussi vers ℓ. ∎

Remarque. Avec les notations de la démonstration, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \qquad a_n \leq \ell \leq b_p$$

d'après la proposition 7.1.1. Ceci précise l'inégalité $(*)$.

Exercice. Propriété des segments emboîtés Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$ et $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ (on dit alors que la suite $([a_n, b_n])$ est une suite de segments emboîtés). Montrer qu'il existe au moins un réel x appartenant à l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$, c'est-à-dire tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x \leq b_n$.

Autrement dit, *l'intersection d'une suite de segments emboîtés n'est jamais vide*. Noter que l'énoncé analogue pour les intervalles ouverts, ou non bornés, est faux : considérer les suites d'intervalles $(]0, \frac{1}{n+1}[)$ et $([n, +\infty[)$.

Chapitre 8

Développement décimal d'un réel

8.1 Nombres décimaux

Définition 8.1.1. *On dit qu'un réel x est un nombre décimal s'il existe un entier naturel c tel que $10^c x$ soit entier.*

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Un nombre décimal est donc un nombre *rationnel* de la forme $\frac{a}{10^c}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}$.

Exercice. Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel, avec a et b entiers *premiers entre eux*. Montrer que x est décimal si et seulement si les seuls nombres premiers (éventuels) divisant b sont 2 et 5.

Par exemple, $1/3$ est rationnel mais n'est pas décimal.

En écriture décimale, le symbole $b_d \dots b_0, a_1 \dots a_c$ (où $d \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}^*$ et les b_j et les a_k pour $0 \leq j \leq d$ et $1 \leq k \leq c$ sont des entiers compris entre 0 et 9) représente le nombre décimal $x = \sum\limits_{j=0}^{d} b_j 10^j + \sum\limits_{k=1}^{c} \frac{a_k}{10^k}$
On a $x = b_d \dots b_0 + 0, a_1 \dots a_c$. La partie « après la virgule » vérifie

$$0 \leq 0, a_1 \dots a_c \leq \sum_{k=1}^{c} \frac{9}{10^k} = 1 - 10^{-c} < 1,$$

donc elle appartient à $[0, 1[$ et la partie entière de x est l'entier $b_d \dots b_0$.
Il est facile de montrer (*exercice)* que tous les décimaux positifs ont une écriture de cette forme, et qu'elle est unique si l'on adopte les conventions habituelles :
- la partie avant la virgule est la suite (0), ou bien son premier chiffre est non nul ;
- le dernier chiffre après la virgule est non nul (et en pratique on omet la virgule dans le cas d'un entier).

Remarques.
- À propos de ces conventions, il serait plus cohérent (mais peut-être moins lisible) de supprimer le 0 isolé avant la virgule : ainsi $1/10$ serait noté $,1$ et 0 serait désigné par la suite vide $()$ (ou $(,)$ avec virgule).
- On rappelle que la virgule est le *seul* séparateur décimal légalement en vigueur en France, et dans la majeure partie de l'Europe occidentale (à l'exception des îles Britanniques). Ceux qui

invoquent l'informatique pour justifier l'usage du point décimal sont de gros menteurs et/ou de gros paresseux : les systèmes les plus répandus (notamment les tableurs) donnent le choix.
– Pour les décimaux négatifs, la convention est que $-1/2$ se note $-0,5$ (et non, par exemple, $(-1),5$) : on prendra donc garde que la partie avant la virgule n'est *pas* en général la partie entière.

Posons $x_0 = b_d \dots b_0$ et pour $1 \leq N \leq c$, $x_N = b_d \dots b_0, a_1 \dots a_N$. On vérifie que pour tout $N \in \{1, \dots, c\}$:

$$x_N = 10^{-N} E[10^N x] \text{ et } a_N = E[10^N(x - x_{N-1})].$$

8.2 Approximation des réels par les décimaux

Ce qui précède se généralise aux nombres réels, au moyen de la notion de limite. Pour simplifier on va se restreindre aux réels compris entre 0 et 1 :

Proposition 8.2.1. *Soit x un réel tel que $x \in [0, 1[$. Posons $x_0 = 0$ et, pour $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$x_N = 10^{-N} E[10^N x] \text{ et } a_N = E[10^N(x - x_{N-1})].$$

Alors :

1. *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, le nombre décimal x_N est une valeur approchée par défaut de x à 10^N près, c'est-à-dire : $0 \leq x - x_N < 10^{-N}$ (ou encore $x_N \leq x < x_N + 10^{-N}$).*
2. *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $x_N = 0, a_1 \dots a_N$.*
3. *$x = \lim_{N \to +\infty} 0, a_1 \dots a_N$.*

Démonstration. (1) s'obtient en appliquant la définition de x_N.
Pour $N \in \mathbb{N}^*$, par définition de a_N, on a $a_N \leq 10^N(x - x_{N-1}) < 1 + a_N$, donc $E[10^N x] = 10^N x_{N-1} + a_N$ et par définition de x_N, $x_N = x_{N-1} + \frac{a_N}{10^N}$.
Le résultat (2) s'obtient donc en faisant une récurrence sur N.
(3) est une conséquence directe de (1) et (2). ∎

Théorème 8.2.2.

1. Tout réel est limite d'une suite de décimaux.
2. Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un rationnel et un irrationnel.

Démonstration. (1) est une conséquence de la proposition précédente.
(2) On peut se ramener au cas d'un intervalle $]a, b[$, où $a < b$. Le milieu $\frac{a+b}{2}$ de l'intervalle est limite d'une suite (x_n) de décimaux. Pour N assez grand, x_N est donc dans l'intervalle et il est rationnel. L'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$ contient de même un rationnel r et $r + \sqrt{2}$ appartient à $]a, b[$. Or $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, donc $r + \sqrt{2}$ non plus. On a trouvé un irrationnel dans $]a, b[$. ∎

8.3 Développement décimal

Soit (a_n) une suite de nombres entiers compris entre 0 et 9, avec $a_0 = 0$ et pour $N \in \mathbb{N}^*, x_N = 0, a_1 \dots a_N$.

La suite (x_N) est croissante et bornée ($x_N \in [0,1[$ pour tout N), donc elle converge vers un réel $x = \lim_N x_N$ de l'intervalle $[0,1]$, que l'on note $x = 0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$. On dit que $0, a_1 \dots a_N \dots$ est un *développement décimal* de x.
On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 1 - \frac{1}{10^n}$, donc à la limite, $0,999\dots = 1$ et plus généralement si $a_N \neq 9$, on a :

$$0, a_1 a_2 \dots a_N 999 \dots = 0, a_1 a_2 \dots a'_N 000 \dots \text{ où } a'_N = 1 + a_N.$$

Un développement qui ne stationne pas à 9 est dit *propre*.

Proposition 8.3.1. *Un réel $x \in [0,1]$ a un développement décimal propre et un seul.*

Démonstration. Comme on l'a vu plus haut (8.2.1), si on pose $\forall N \in \mathbb{N}^*, x_N = 10^{-N} E[10^N x] = 0, a_1 \dots a_N$, alors $0, a_1 \dots a_N \dots$ est un développement de x. Si ce développement stationnait à 9, on aurait $x = 0, a_1 a_2 \dots a_N 999 \dots = x_N + \frac{1}{10^{-N}}$, ce qui est impossible. Donc x a au moins un développement propre.
Inversement, soit $0, a_1 \dots a_N \dots$ un développement propre de x. Puisque (a_n) ne stationne pas à 9, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un $n \geq 1$ tel que $a_{N+n} \neq 9$. On a alors $x \leq 0, a_1 \dots a_N 9 \dots 9 a_{N+n} 999 \dots = 0, a_1 \dots a_N 9 \dots 9 a'_{N+n}$ où $a'_{N+n} = 1 + a_{N+n}$. Donc $x_N \leq x \leq 0, a_1 \dots a_N 9 \dots 9 = x_N + 10^{-N}(1 - \frac{1}{10^n}) < x_N + 10^{-N}$. On obtient $x_N = 10^{-N} E[10^N x]$. On retrouve le développement considéré dans la proposition $8.2.1$. Donc x a un seul développement propre. ∎

Remarques.
- Un réel de $[0,1[$ est décimal (respectivement rationnel) si et seulement si son développement propre stationne à 0 (respectivement est périodique).
- Seuls les nombres décimaux ont deux développements, un qui stationne à 9 et un qui est propre.

8.4 Compléments

Définition 8.4.1. *Dire qu'un ensemble E est dénombrable signifie qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de E telle que E soit l'ensemble des éléments u_n.*

Exemples. Un ensemble fini non vide est dénombrable, les ensembles N, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Proposition 8.4.2. *L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable, l'ensemble $\mathbb{R}$ non plus.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de nombres éléments de $[0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $(a_p^{(n)})_{p \in \mathbb{N}^*}$ le développement propre de u_n et $a'_n = a_n^{(n)} - 1$ si $a_n \neq 0$, $a'_n = 1$ si $a_n^{(n)} = 0$. Soit $x = 0, a'_1, \dots a'_n \dots$; c'est un développement propre et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a'_n \neq a_n^{(n)}$, donc $x \neq u_n$. L'ensemble $[0,1[$ ne se réduit pas à l'ensemble des éléments u_n de la suite. Ceci étant vrai pour n'importe quelle suite, ni $[0,1]$, ni $\mathbb{R}$ ne sont dénombrables. ∎

Exercice Calculer $0,98989898 \dots \times 0,12121212 \dots$.

Chapitre 9

Suites définies par une formule de récurrence.

9.1 Généralités

On cherche souvent à étudier des suites vérifiant une relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$).

Exemple. Soit $q \in \mathbb{R}$. Si on cherche les suites réelles (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$, il est facile de voir que les solutions sont les suites $(u_n) = (aq^n)$ où $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire les suites géométriques de raison q.

La première question est de savoir si on peut définir de telles suites. Plus généralement :

Proposition 9.1.1. *Soient E un ensemble quelconque, f une application de E dans E, et a un élément de E. Il existe alors une et une seule suite $u : \mathbb{N} \to E$ d'éléments de E vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $u_0 = a$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n)$.

On dit alors que (u_n) est définie par récurrence par les conditions (i) *et* (ii).

Démonstration. L'unicité est facile, sous la forme suivante : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les conditions voulues, alors on voit tout de suite, par récurrence sur p, que $u_p = u'_p$ pour tout p.

Esquissons la preuve de l'existence, qui est un peu plus subtile qu'il n'y paraît. Pour chaque entier $p \in \mathbb{N}$, notons Σ_p l'ensemble des « solutions partielles de rang p » du problème, c'est-à-dire l'ensemble des suites *finies* $s = (s(0), \dots, s(p))$ vérifiant $s(0) = a$ et $s(k+1) = f(s(k))$ pour tout $k < p$ (ce sont les conditions (i) et (ii) limitée aux entiers $< p$). On montre alors (facilement) par récurrence sur p que Σ_p a un unique élément, que l'on peut donc nommer, disons $s_p = (s_p(0), \dots, s_p(p))$. De plus, il est clair que pour tout $k \leq p$, la suite $(s_p(0), \dots, s_p(k))$ appartient à Σ_k et est donc égale à $(s_k(0), \dots, s_k(k))$. Autrement dit, $s_p(k)$ (qui a un sens dès que $p \geq k$) est indépendant de p. Si l'on pose $u_n := s_n(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on vérifie alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions (i) et (ii) de l'énoncé. ∎

Remarque. En pratique, nous appliquerons cette proposition lorsque E est un intervalle I de $\mathbb{R}$; f est alors une fonction réelle, mais il faut vérifier soigneusement qu'elle définit bien une application de I dans I, c'est-à- dire que f est définie sur I et que $f(I) \subset I$. (Bien entendu, c'est immédiat si $I = \mathbb{R}$ et si f est définie sur $\mathbb{R}$.)

Exercice. Etudier l'existence de suites réelles (u_n) telles que :
(a) $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$;
(b) $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}$.
Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ peut-on définir une suite (u_n) vérifiant $u_0 = a$, et (a) (resp. (b)) ?

Proposition 9.1.2. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et à valeurs dans I, et $a \in I$.*

Soit $u : \mathbb{N} \to I$ la suite définie par les conditions : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On suppose de plus que f est continue *sur I. Alors, si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ appartenant à I, on a $f(\ell) = \ell$.*

Les réels ℓ tels que $f(\ell) = \ell$ sont appelés **points fixes** de f. La proposition dit que les seules limites *possibles* pour (u_n) sont les points fixes de f.

Remarque. Ne pas oublier l'hypothèse que (u_n) a une limite ! En revanche, la condition que $\ell \in I$ est automatique si I est un intervalle fermé (exercice).

Démonstration. Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in I$. Comme f est continue, on a $\lim\limits_{x\to\ell} f(u_n) = f(\ell)$ d'après la proposition 5.1.5. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n, ceci donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$. Or $n \mapsto u_{n+1}$ est une sous-suite de u donc converge vers ℓ, d'où finalement $f(\ell) = \ell$. ∎

9.2 Étude d'une suite récurrente.

1. Il est souvent utile de représenter la fonction f, la droite $y = x$, ainsi que quelques termes de la suite en fonction de u_0. Ces dessins peuvent permettre de deviner le comportement de la suite (u_n) selon les valeurs de u_0 : un dessin « en escalier » fait conjecturer que la suite est monotone, un dessin en « escargot » que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones ; ce dessin peut aider à deviner si la suite est convergente ou non.
2. Vérifier si la suite est bien définie, en cherchant par exemple un intervalle conservé par f.
3. Chercher les candidats pour une limite éventuelle ℓ de la suite.
4. Ensuite, on peut étudier la monotonie éventuelle de (u_n) (cas d'un escalier) ou de ses sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) (cas d'un escargot) et essayer d'utiliser le théorème sur les suites monotones ou le théorème sur les suites adjacentes (*méthode qualitative*).

   Attention ! Si f est continue, les limites éventuelles de (u_{2n}) et de (u_{2n+1}) sont des points fixes de $f \circ f$ et non de f : regarder l'exemple où u_0 est un réel quelconque et où $u_{n+1} = -u_n \ldots$

5. On peut aussi utiliser une *méthode quantitative*, en estimant $|u_n - \ell|$ où ℓ est un candidat limite. On arrive parfois à estimer $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de $|u_n - \ell|$, puis par récurrence, en fonction de $|u_0 - \ell|$. On peut par exemple, utiliser l'inégalité suivante, dite *des accroissements finis* :

   Proposition 9.2.1. *Si f est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, on a pour tous $x, y \in I$:*
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$
■

   Sous ces mêmes hypothèses, on en déduit en effet la majoration $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq M|u_n - \ell|$ pour tout entier n, d'où $|u_n - \ell| \leq M^n|u_0 - \ell|$. Si $M < 1$, la suite converge alors d'autant plus vite que M est plus petit.
   Cette méthode ne dit rien sur la monotonie éventuelle de (u_n), mais permet par exemple de déterminer n pour que l'erreur $|u_n - \ell|$ soit inférieure à un ε donné.

9.3 Méthode de Newton

On veut calculer une valeur décimale approchée d'une solution ℓ d'une équation $g(x) = 0$ où $g : J \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle J.

On commence par **localiser** la solution cherchée, c-à-d. déterminer un intervalle $I = [a, b] \subset J$ sur lequel g s'annule une fois et une seule.

Exemple. Pour calculer une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$, on peut considérer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2 - 2$ pour tout réel x et prendre $I = [1, 2]$.

En général, on peut utiliser le résultat suivant :

Théorème 9.3.1. *Si g est continue sur un segment $I = [a, b]$ et si $g(a)g(b) \leq 0$, alors l'équation $g(x) = 0$ a une solution x dans I.*
Si de plus g est strictement monotone sur I cette solution est unique. ■

Remarques. La première assertion est connue sous le nom de « théorème des valeurs intermédiaires » ; nous l'admettrons ici. La seconde est évidente puisque g est alors injective.

Une fois la solution localisée, on utilise une suite récurrente (u_n) obtenue par « linéarisation » de la façon suivante :
On choisit un $u_0 \in I$. Puis pour calculer u_{n+1} en fonction de u_n, on considère la tangente à la courbe représentative de g au point $(u_n, g(u_n))$; u_{n+1} est alors l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des x.
Quelle est la relation de récurrence ? Comme l'équation de la tangente en $(u_n, g(u_n))$ est $y - g(u_n) = g'(u_n)(x - u_n)$, on obtient $y = 0$ si
$$x = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}$$
d'où la relation $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}$.

Evidemment, pour que cette construction soit possible, il faut que $u_n \in I$ (pour que $g(u_n)$ soit défini), que la tangente au graphe de g au point d'abscisse u_n existe, et qu'elle ne soit pas parallèle à l'axe des x. Pour n donné, ces conditions permettent de calculer u_{n+1}, lequel doit vérifier les mêmes conditions. En pratique, il suffit de pouvoir choisir I de sorte que :

- g soit dérivable sur I et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$;
- on ait $f(I) \subset I$, où f est la fonction $x \mapsto x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ (qui est bien définie sur I, vu la condition précédente).

On peut observer que $f(\ell) = \ell$, et aussi que $f'(\ell) = 0$ (au moins si f est deux fois dérivable en ℓ).

Dans l'exemple ci-dessus on a $g(x) = x^2 - 2$ et $I = [1; 2]$; la première condition est bien vérifiée. La fonction f est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Si $x \in I = [1; 2]$, alors $\frac{2}{x} \in I$ donc $f(x) \in I$ (c'est la moyenne de x et $\frac{2}{x}$) donc on a bien $f(I) \subset I$.

On obtient donc une suite u définie par $u_0 = 1$ (par exemple) et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n}.$$

Cette suite est aussi connue sous le nom de *suite de Héron*.
On obtient ainsi $u_1 = 1,5$; $u_2 = 1,4166666.....$; $u_3 = 1,4142157.....$; $u_4 = 1,4142136.....$
Les valeurs de u_n semblent se stabiliser assez vite. En vérifiant que $g(1,414213) \times g(1,414215) < 0$, l'application du théorème 9.3.1 montre que $\sqrt{2} \in]1,414213, 1,414215[$, donc $1,414214$ est une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près.

Si on veut plus précisément estimer la **rapidité de convergence**, on est conduit à estimer $|u_n - \sqrt{2}|$ en fonction de n ; pour cela, on peut utiliser l'inégalité des accroissements finis en majorant $|f'|$ sur un intervalle contenant les termes de la suite. On voit que $f'(\sqrt{2}) = 0$, donc si on part « assez près » de $\sqrt{2}$, la convergence doit être rapide.
Mais il y a mieux ! En effet, on a $|u_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2} \leq (u_n - \sqrt{2})^2$. Donc, si $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-p}$ avec $p \in \mathbb{N}$, on obtient $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq 10^{-2p}$. On dit que la convergence est quadratique (en gros, le nombre de décimales exacte double à chaque itération).

Ce phénomène est général pour la méthode de Newton, du moins pour des fonctions f assez régulières (par exemple deux fois continûment dérivables).
(Pour ceux qui connaissent les développements limités, on a en effet, au voisinage de ℓ : $f(x) = f(\ell) + (x-\ell)f'(\ell) + \frac{(x-\ell)^2}{2}(f''(\ell) + \varepsilon(x))$ où $\lim\limits_{x \mapsto \ell} \varepsilon(x)) = 0$, d'où $f(x) - f(\ell) = \frac{(x-\ell)^2}{2}(f''(\ell) + \varepsilon(x))$.)

Chapitre 10

Séries numériques

10.1 Notion de série.

On est souvent amené à étudier la convergence d'une suite fabriquée de la façon suivante : on part d'une suite (réelle ou complexe) $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, couramment appelée « terme général », et on lui associe la suite $\mathbf{S}(u)$, dite des « sommes partielles », définie par

$$\mathbf{S}(u)_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Définition 10.1.1. *Soit* (u_n) *une suite réelle ou complexe. Pour* $N \in \mathbb{N}$*, on pose* $S_N = \mathbf{S}(u)_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.

On dit que que la série de terme général u_n converge *(resp.* diverge*) si la suite* (S_N) *des sommes partielles converge (resp. diverge).*

Dans le cas convergent, la limite $\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$ *est notée* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *et appelée* somme *de la série.*

Remarques.

– La notion de « somme d'une infinité de termes » n'a *pas de sens* en général. L'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'est qu'une *notation*, suggestive mais parfois dangereuse ; pour l'utiliser, il faut toujours revenir à sa définition (comme limite des sommes partielles) et aux résultats généraux sur les séries.

– Dans les énoncés, la série est désignée par son terme général, alors que la suite des sommes partielles est celle dont on étudie la convergence.

Exemples.

1. Pour la suite des entiers, $(u_n) = (n)$, on obtient pour tout N, $\mathbf{S}(u)_N = 0 + 1 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$: il est donc clair que cette série diverge.
2. Si (u_n) est une suite géométrique de raison q ($q \in \mathbb{C}, q \neq 1$), on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{S}(u)_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

La série converge donc si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas, on obtient la formule (fondamentale) :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{si } |q| < 1.}$$

3. Si $(u_n) = \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$, on observe que pour tout entier n, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, d'où $\mathbf{S}(u)_N = 1 - \frac{1}{N+2}$ pour tout entier N. La série est donc convergente, et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$.
4. La *série harmonique* est la série de terme général $u_n := \frac{1}{n+1}$, de sommes partielles $S_N := \mathbf{S}(u)_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N+1}$.
   Montrons que la série harmonique est *divergente* : en effet, si on suppose (par l'absurde) qu'elle converge, on a $\lim_{N \to +\infty} (S_{2N-1} - S_{N-1}) = 0$ (la suite (S_{N-1}) est convergente et la suite (S_{2N-1}) en est une sous-suite donc a la même limite). Mais pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2N-1} - S_{N-1} = \sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{n+1} \geq N \times \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$, d'où une contradiction.
5. La *série harmonique alternée* est la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$, de sommes partielles $\mathbf{S}(u)_N = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N+1}$. On verra plus loin qu'elle est convergente ; on peut montrer que sa somme est égale à $\ln(2)$.
6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers compris entre 0 et 9. Les résultats du chapitre 8 montrent que la série $\sum_n 10^{-n} a_n$ est convergente et que sa somme est (par définition !) le nombre dont l'écriture décimale est $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$.

Utilisation du signe $\sum$

– La somme $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ ne dépend que de N et pas de n ; on dit que l'indice n est muet. On peut tout aussi bien écrire par exemple $S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$; il faut seulement prendre garde à remplacer la lettre n par la lettre k partout où elle apparaît.
– On peut faire des « changements d'indice ». Par exemple, en faisant le changement $n' = n + 1$, on obtient $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n'=1}^{N+1} \frac{1}{n'} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n}$. Il est *viveent conseillé* de changer le nom de l'indice, quitte à revenir au nom initial ensuite comme on vient de le faire.

10.2 Suites et séries

À partir d'une suite (u_n), on peut construire la série de terme général (u_n), dont les sommes partielles sont $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$; le comportement de la série dépend étroitement de celui de la suite (u_n).

Inversement, pour étudier une suite (v_n), il est souvent intéressant de considérer la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_n = v_n - v_{n-1}$ pour tout $n > 0$. (C'est par exemple ce qu'on fait quand on étudie la monotonie de (v_n)).
On a alors pour tout n, $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, c'est-à-dire que v_n est la somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n. On voit ainsi que toute suite est la suite des sommes partielles d'une unique série.
Avec ces notations, dire que (v_n) est croissante (respectivement décroissante) revient à dire que les

termes u_n sont tous positifs (respectivement négatifs) à l'exception possible de u_0.

10.3 Convergence d'une série.

Si deux suites ont tous leurs termes égaux à partir d'un certain rang n_0, les sommes partielles des deux séries correspondantes diffèrent d'une constante C à partir du rang n_0. Les deux séries sont donc de même nature (convergentes/divergentes).
Autrement dit la *nature* d'une série de terme général u_n ne dépend pas des premiers termes de la suite (u_n). (En revanche, si les deux séries convergent, leurs *sommes* diffèrent de la constante C.)

Proposition 10.3.1. (Une condition nécessaire de convergence)
Si la série de terme général u_n converge, on a $\lim_n u_n = 0$.

Démonstration. Supposons que la série converge, soit $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles, et soit $S = \lim\limits_{N\to\infty}$ sa somme. Pour tout entier n, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$; donc la suite (u_n) converge et sa limite est $S - S = 0$. ∎

△ **La réciproque est fausse.** Par exemple, le terme général de la série harmonique tend vers 0, mais la série diverge.
Une série dont le terme général ne converge pas vers 0 est dite *grossièrement divergente.*

10.4 Opérations sur les séries.

Proposition 10.4.1. *Soient λ un réel (ou un complexe) et (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels (ou complexes).*

1. *Si la série de terme général u_n converge, la série de terme général λu_n converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n)$.*
2. *Si les deux séries de terme général u_n et v_n convergent, la série de terme général $u_n + v_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n) + (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n)$.*

Démonstration. Laissée au lecteur. ∎

Chapitre 11

Séries numériques à termes réels positifs

11.1 Un critère de convergence

Proposition 11.1.1. *Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont réels positifs.*
La série de terme général (u_n) converge si et seulement si la suite (S_N) de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration. L'hypothèse implique que la suite des sommes partielles est croissante. Or, une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée. ∎

11.2 Comparaison de deux séries à termes positifs

Proposition 11.2.1. (Majoration par une série convergente) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :*

1. *Si la série de terme général v_n converge, celle de terme général u_n converge aussi et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*
2. *Si la série de terme général u_n diverge, celle de terme général v_n diverge aussi.*

Démonstration. (1) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n. \qquad (*)$$

Si la série de terme général v_n converge, la suite de ses sommes partielles est majorée ; d'après $(*)$ la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est aussi majorée et cette série est à termes positifs, donc elle converge (proposition 11.1.1). L'inégalité entre les deux sommes s'obtient en passant à la limite dans $(*)$.
(2) est une conséquence immédiate de (1). ∎

Exemples.

1. Si $(u_n) = (\frac{2^n-1}{3^n+1})$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$; le terme de droite est celui d'une série géométrique de raison $\frac{2}{3}$, qui converge car $|\frac{2}{3}| < 1$; donc la série de terme général u_n (positif) converge aussi.
2. Si $(u_n) = (\frac{\ln(n+3)}{n+1})$, pour tout n, on a $u_n \geq \frac{1}{n+1} \geq 0$. La série de terme général u_n est donc divergente, comme la série harmonique.

Voici une première application :

Proposition 11.2.2. (Utilisation d'un équivalent) *Soient u_n et v_n les termes généraux de deux séries à termes réels strictement positifs. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, alors les deux séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.*

Démonstration. Utilisons la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ « pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ». Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$, donc $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$. Il suffit d'appliquer la première proposition de comparaison de deux séries. ∎

11.3 Comparaison avec une intégrale

Soit f une fonction *décroissante et positive* définie (disons) sur $[0, +\infty[$. Nous allons étudier la convergence de la série de terme général $f(n)$; les sommes partielles sont donc données par la suite croissante

$$S_n = f(0) + \ldots + f(n).$$

On peut alors comparer le comportement de la suite S_n et celui de la suite (également croissante) des intégrales (on suppose qu'elles existent ; c'est le cas notamment si f est continue)

$$I_n := \int_0^n f(t)\,dt.$$

Pour cela, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n := \int_n^{n+1} f(t)\,dt.$$

Puisque f est décroissante et positive, on a $0 \leq f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ pour tout $t \in [n; n+1]$. On en déduit que J_n est encadrée par les intégrales sur $[n; n+1]$ des constantes $f(n+1)$ et $f(n)$. En d'autres termes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) \leq J_n \leq f(n).$$

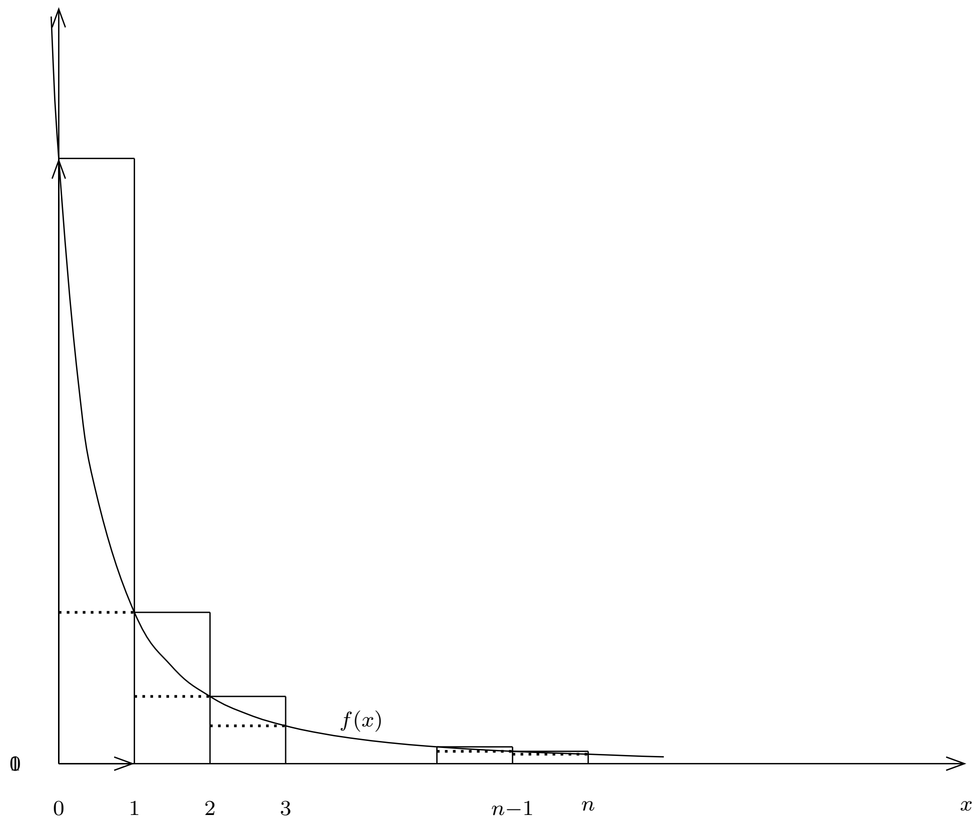
En sommant ces inégalités de 0 à $N-1$ ($N \geq 1$ entier), on obtient

$$f(1) + \ldots + f(N) \leq J_0 + \ldots + J_{N-1} \leq f(0) + \ldots + f(N-1),$$

c'est-à-dire, par la « relation de Chasles » et la définition de S_N,

$$S_N - f(0) \leq I_N \leq S_{N-1}.$$

Si I_N a une limite lorsque N tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite $(S_N - f(0))$, et donc (S_N), est majorée, donc convergente.
Réciproquement, si la suite (I_N) diverge alors elle tend vers $+\infty$ (puisqu'elle est croissante) ; il en est donc de même de (S_{N-1}), donc de (S_N) : la série diverge.



Nous avons donc montré :

Théorème 11.3.1. *Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive. On suppose en outre que f est intégrable sur tout intervalle borné $[0; a]$ $(a > 0)$* (cette condition est notamment réalisée lorsque f est continue)*.*

Alors, pour que la série de terme général $f(n)$ soit convergente, il faut et il suffit que la suite *des intégrales*

$$I_n := \int_0^n f(t)\, dt$$

ait une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. ∎

Remarques. Dans le cas où I_n a une limite, on dit que « l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente », ou que « f est intégrable sur $[0; +\infty[$ ». Dans ce cas, on pose

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt := \lim_{n \to +\infty} \int_0^n f(t)\, dt.$$

La démonstration ci-dessus montre (par passage à la limite d'inégalités) que l'on a l'encadrement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \quad \leq \quad \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \quad \leq \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt \quad \leq \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \quad \leq \quad f(0) + \int_0^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Voici un exemple très important :

Définition 11.3.2. *Soit $\alpha \in R$ un réel. La série de terme général* $\frac{1}{n^\alpha}$ $(n \geqslant 1)$ *est appelée* série de Riemann *d'exposant α.*

Théorème 11.3.3. *La série de Riemann d'exposant α est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. Dans le cas $\alpha \leq 0$, le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente.
Si $\alpha > 0$, appliquons le théorème précédent à la fonction $x \mapsto f_\alpha(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha}$. Elle est positive, continue et décroissante (parce que $\alpha > 0$) sur $\mathbb{R}_+$, donc le théorème s'applique. La fonction f_α admet pour primitive la fonction

$$x \mapsto F_\alpha(x) = \int_0^x (1+t)^{-\alpha} dt = \begin{cases} \frac{(1+x)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(1+x) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} F_\alpha(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

d'où le résultat. ∎

Remarques.
– Lorsque $\alpha = 1$ on retrouve la divergence de la série harmonique.
– Pour $\alpha > 1$, la remarque suivant le théorème donne l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha - 1} \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \leq \quad 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Exercice : les séries de Bertrand. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ $(n \geq 2)$. Montrer que cette série converge lorsque $\alpha > 1$ ou que $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. Sinon, elle diverge.

11.4 Comparaison avec les séries géométriques : critères de Cauchy et de d'Alembert

Proposition 11.4.1. (critère de d'Alembert) *Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs. Supposons que $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.*
(i) Si $\ell < 1$, la série converge.
(ii) Si $\ell > 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et la série diverge grossièrement.

Démonstration. (i) Supposons $\ell < 1$ et choisissons un réel q tel que $\ell < q < 1$ (par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$). Il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, soit (puisque $u_n > 0$), $u_{n+1} \leq q u_n$. On en déduit $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0} = q^n \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$. La série géométrique de terme général q^n converge puisque $0 \leq q < 1$. Le premier critère de comparaison montre que la série de terme général u_n converge.

(ii) Supposons $\ell > 1$ et choisissons un réel q tel que $1 < q < \ell$. On montre comme ci-dessus qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \geq c\, q^n$, où c est une constante > 0. Comme $q > 1$, on en déduit le résultat. ∎

Remarque. Comme on le voit dans la démonstration, on a un résultat plus général : s'il existe $q \in]0;1[$ tel que $u_{n+1} \leq q\, u_n$ pour n assez grand, la série converge. S'il existe $q > 1$ tel que $u_{n+1} \geq q\, u_n$ pour n assez grand, le terme général tend vers $+\infty$.

Proposition 11.4.2. (critère de Cauchy) *Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs. Supposons que $\lim_n (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.*
(i) Si $\ell < 1$, la série converge.
(ii) Si $\ell > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la série diverge grossièrement.

La démonstration se fait comme celle du critère de d'Alembert.

Exemples.

1. Si $(u_n) = (\frac{3^n}{n+1})$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3\frac{n}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 > 1$; la série de terme général u_n diverge d'après le critère de d'Alembert.
2. Si $(u_n) = (\frac{1}{(n+1)^n})$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $(u_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = 0$; la série de terme général u_n converge d'après le critère de Cauchy.

Attention !

1. Il peut arriver que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ ou $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ n'ait pas de limite.
2. Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = 1$), le critère de d'Alembert (resp. de Cauchy) ne permet pas de conclure. Voir par exemple le cas des séries de Riemann.

Exemples.

1. Si $(u_n) = \left(\frac{1}{(n+1)^\alpha + \sin n}\right)$ avec $\alpha > 0$, les termes généraux u_n et $\frac{1}{n^\alpha}$ sont strictement positifs et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^\alpha} = 1$. Donc la série de terme général u_n est de même nature que la série de Riemann d'exposant α. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Soit $(u_n) = \left(\frac{\ln(n+1}{(n+1)^2}\right)$. On peut voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n n^{\frac{3}{2}} = 0$, donc que pour n assez grand, $0 \leq u_n n^{\frac{3}{2}} \leq 1$, ce qui donne $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Les deux séries sont à termes positifs. La série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$ converge ($\frac{3}{2} > 1$) et majore celle de terme général u_n, donc celle-ci converge aussi.
3. Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}\ln(n+2)}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$, donc pour n assez grand, $u_n \geq \frac{1}{n} > 0$, d'où l'on déduit la divergence de la série de terme général u_n.

Chapitre 12

Séries absolument convergentes.

Définition 12.0.3. *Soit (u_n) une suite complexe. On dit que la série de terme général u_n est* absolument convergente *si la série de terme général (réel positif) $|u_n|$ est convergente.*

Proposition 12.0.4. *Soit (u_n) une suite complexe. On suppose que la série de terme général u_n est absolument convergente Alors cette série est* convergente *et l'on a*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \,.$$

Attention ! La réciproque est fausse. La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ n'est pas absolument convergente, mais on verra au chapitre 13 qu'elle converge.
Une série qui converge mais n'est pas absolument convergente est dite parfois *semi-convergente.*

Démonstration. Supposons d'abord que la suite u est réelle. Pour tout entier n, on note alors $u_n^+ = \sup(u_n, 0)$ et $u_n^- = \sup(-u_n, 0)$ les « parties positive et négative » de u_n ; on a alors $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Les séries ayant respectivement pour terme général u_n^+ et u_n^- sont donc convergentes d'après le critère de comparaison 11.2.1. Comme $u_n = u_n^+ - u_n^-$ pour tout n, le résultat s'obtient par la proposition $10.4.1$.

Dans le cas général, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\mathrm{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $|\mathrm{Im}(u_n)| \leq |u_n|$. Le critère de comparaison 11.2.1 entraîne donc que la série de terme général (réel) $\mathrm{Re}(u_n)$ (resp. $\mathrm{Im}(u_n)$) est absolument convergente, donc convergente d'après le cas réel établi ci-dessus. Donc la série de terme général $\mathrm{Re}(u_n) + i\,\mathrm{Im}(u_n) = u_n$ converge.

L'inégalité sur les sommes s'obtient en remarquant l'inégalité analogue pour les sommes partielles

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n|$$

qui est toujours vérifiée (inégalité triangulaire), puis en prenant les limites lorsque N tend vers $+\infty$. ■

Exemples.

1. Si $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, on a $|u_n| = \frac{1}{n^2}$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $u_n = \frac{z^n}{\sqrt{n+1}\ln(n+2)}$; on a $|u_n| = \frac{|z|^n}{\sqrt{n+1}\ln(n+2)}$. On peut essayer d'appliquer le critère de d'Alembert à la série de terme général strictement positif $|u_n|$; on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |z|$. On en déduit ce qui suit :
(i) si $|z| < 1$, la série $\sum |u_n|$ converge, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente (a fortiori convergente) ;
(ii) si $|z| > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$, donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
(iii) Si $|z| = 1$, ce critère ne permet pas de conclure. Mais dans ce cas, on a $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}\ln(n+2)}$ et on a vu plus haut (exemple 3 à la fin du $\S 11$) que cette série diverge. La série de terme général u_n n'est donc pas absolument convergente.
Si $z = 1$, la série diverge ; sinon, il faut trouver d'autres arguments pour décider si elle est ou non convergente.

Chapitre 13

Séries alternées.

Définition 13.0.5. *La série de terme général réel u_n est dite* alternée *si le terme général u_n est alternativement positif ou négatif, c'est-à-dire*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|.$$

Exemples.

1. La série de terme général $\ln(1 + \frac{(-1)^n}{n+1})$.
2. La série harmonique alternée, de terme général $(-1)^n \frac{1}{n+1}$.

Proposition 13.0.6. *Si la série de terme général u_n est alternée et si la suite $(|u_n|)$* décroît et tend vers 0, *la série est convergente.*
Dans ce cas, notons S_∞ sa somme, (S_n) la suite des sommes partielles, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$R_n = S_\infty - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

(R_n est appelé reste d'ordre n de la série). Alors R_n a le signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ (« le reste est majoré en module par son premier terme »).

Commentaire. Si on approche la somme S_∞ par S_n, l'erreur commise est $|R_n|$. On peut donc estimer cette erreur à partir de la majoration précédente.

Démonstration. Supposons pour fixer les idées que $u_{2k} \geq 0$ et $u_{2k+1} \leq 0$ pour tout entier k.

Pour tout entier n, on a :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0,$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0,$$

$$|S_{2n+1} - S_{2n}| = |u_{2n+1}|$$

(pour les deux premières relations on a utilisé l'hypothèse que la suite $|u|$ est décroissante). Donc la suite (S_{2n}) est décroissante, la suite (S_{2n+1}) est croissante et $\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$, c'est-à-dire que les deux sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles ont une limite commune S et on a

vu que dans ce cas, la suite (S_n) converge aussi vers S.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{2n+1} \leq S_{2n+3} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$, d'où les inégalités

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}$$

$$S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}|.$$

On obtient $0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2}$, $R_{2n} \leq 0$ et $|R_{2n}| \leq |u_{2n+1}|$. D'où le résultat. ■

Exemples.

1. Pour $z = -1$, la série de terme général $u_n = \frac{z^n}{\sqrt{n+1}\ln(n+2)}$ est alternée et $(|u_n|)$ décroît vers 0, donc cette série converge.
2. La série harmonique alternée converge. Elle ne converge pas absolument. C'est un exemple de série semi-convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|R_n| \leq \frac{1}{(n+2)}$. La convergence est lente : si l'on veut approcher la somme à 10^{-6} près, il faut sommer environ 10^6 termes.
3. Ne pas oublier l'hypothèse de décroissance. Considérons par exemple la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & (n \text{ pair}) \\ \frac{-1}{(n+1)^2} & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

   C'est une série alternée, dont le terme général tend vers 0. Pourtant elle est divergente : si l'on note (S_n) la suite des sommes partielles, on a pour tout entier p

$$S_{2p+1} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{2i+1} + \sum_{i=0}^{p} \frac{-1}{(2i+2)^2}.$$

   Au second membre, la première somme tend vers $+\infty$ avec p (divergence de la série harmonique) alors que la deuxième somme a une limite finie (convergence de la série de Riemann d'exposant 2). Donc $\lim_{p\to+\infty} S_{2p+1} = +\infty$.
4. Voici un autre contre-exemple. On considère les séries

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n+1}.$$

   Ce sont deux séries alternées (vérifier !) à terme général tendant vers 0. La première converge d'après la proposition 13.0.6. Il en résulte que la deuxième diverge (sinon, la série de terme général $v_n - u_n = \frac{1}{n+1}$ serait convergente !).

   Un autre intérêt de cet exemple est que $\frac{v_n}{u_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, alors que les deux séries ne sont pas de même nature. On voit donc que dans le « critère d'équivalence » de la proposition 11.2.2, la condition de signe est essentielle. (Exercice : ce critère s'étend toutefois aux séries absolument convergentes).

Exercice. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \int_0^1 (1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1})\, dt$.

1. Calculer la somme $(1-t+t^2+\ldots+(-1)^{n-1}t^{n-1})$ et en déduire $S_n = \ln 2 + \int_0^1 (-1)^{n-1} \frac{t^n}{1+t}\, dt$, puis $|S_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1}$,
2. Montrer d'autre part que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

3. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.

Plus généralement, pour x réel, $|x| < 1$, on peut de même considérer $S_n(x) = \int_0^x (1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1})\, dt$ et montrer que

1. $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$
2. $|S_n(x) - \ln(1+x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$
3. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$.

La somme $S_n(x)$ est donc un polynôme de degré n, qui approche $\ln(1+x)$ pour x proche de 0, comme x^{n+1}. On dit que $S_n(x)$ est un *développement limité* d'ordre n de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0. Les développements limités sont étudiés dans le module AN3 (Fonctions de variable réelle).

D'autre part la série $\sum \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ converge pour tout x tel que $|x| < 1$ vers $\ln(1+x)$. Une série de la forme $\sum a_k x^k$ où (a_k) une suite de réels est appelée série entière. Si elle converge sur un intervalle I, et si $S_\infty(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ pour $x \in I$, on dit que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est un *développement en série entière* de S_∞ sur I. Ici, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ est donc un développement en série entière de $\ln(1+x)$ sur $]-1,1[$.

Beaucoup de fonctions peuvent être ainsi développées en série entière. Les propriétés de ces fonctions sont étudiées dans le module SSF (Suites et séries de fonctions).