Année universitaire 2009-2010
Master 1 de mathématiques
Algèbre générale de base

TD 2 : Révisions sur les anneaux

Exercice 1 : Inversibilité

a. Rappeler quel est l'inverse de $(1-T)$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[[T]]$ des séries formelles en T (à coefficients dans $\mathbb{Z}$).

b. Soient A un anneau unitaire (pas forcément commutatif), et $(a, b) \in A^2$. Montrer que si $(1-ab)$ est inversible, alors $(1-ba)$ l'est également. On pourra utiliser la question précédente pour conjecturer l'inverse de $(1-ba)$ en fonction de celui de $(1-ab)$, et vérifier ensuite la conjecture.

c. Soit A l'anneau (non commutatif) des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient a et $b \in A$ définis par $a(f) = f'$, et $b(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que ab est inversible, tandis que ba ne l'est pas.

Dans toute la suite, les anneaux sont supposés commutatifs unitaires, et les morphismes d'anneaux supposés unitaires.

Exercice 2 : Lois non classiques

On munit $\mathbb{Z}$ des deux lois internes $\oplus$ et $\otimes$ définies par les formules $x \oplus y = x + y + 1$ et $x \otimes y = xy + x + y$. Montrer que $(\mathbb{Z}; \oplus; \otimes)$ est un anneau. À quel anneau plus classique est-il isomorphe ?

Exercice 3 : Morphisme de Frobénius

Soient p un nombre premier, et A un anneau tel que $px = 0$ pour tout $x \in A$. Montrer que l'application $F : A \to A$ qui à x associe x^p est un morphisme d'anneaux. Que vaut-il dans le cas où $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 4 : Endomorphismes des réels et des complexes

a. Trouver tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pourra montrer qu'un tel morphisme fixe $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ point par point, puis qu'il est croissant.

b. Trouver tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui commutent avec la conjugaison complexe.

Exercice 5 : Lemme chinois

Soient A un anneau, I et J deux idéaux de A tels que $I + J = A$ (on dit alors que I et J sont *premiers entre eux*). Montrer que le morphisme canonique $\phi : A \to (A/I) \times (A/J)$ est surjectif, et que $IJ = I \cap J$. En déduire que $A/(IJ)$ et $(A/I) \times (A/J)$ sont isomorphes.

Exercice 6 : Anneaux principaux de polynômes

On rappelle qu'un *idéal principal* est un idéal engendré par un seul élément, et qu'un *anneau principal* est un anneau intègre dans lequel tout idéal est principal.

a. Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[X, Y]$ n'est pas principal. (On pourra considérer l'idéal engendré par X et Y).

b. De même, montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

c. Plus généralement, montrer que si A est un anneau intègre tel que $A[X]$ est principal, alors A est un corps.

Exercice 7 : Idéaux premiers d'un anneau principal

Soit A un anneau principal. Montrer que les idéaux premiers de A sont l'idéal nul et les idéaux principaux engendrés par un élément irréductible. (On rappelle qu'un élément *irréductible* est un élément $a \in A$ non inversible tel que s'il existe $(b, c) \in A^2$ tel que $a = bc$, alors b ou c est inversible.)

Exercice 8 : Anneaux quotients

Soient A un anneau, I et J deux idéaux de A, avec $I \subset J$. On note J/I l'idéal image de J dans l'anneau A/I par la projection canonique.

a. Montrer que $\frac{A/I}{J/I} \simeq A/J$.

b. En déduire que J est un idéal premier (resp. maximal) de A si, et seulement si, J/I est un idéal premier (resp. maximal) de A/I.

Exercice 9 : Lemme de Gauss

Soit A un anneau.

a. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, et I et J des idéaux quelconques. Montrer que si $IJ \subset \mathfrak{p}$, alors $I \subset \mathfrak{p}$ ou $J \subset \mathfrak{p}$.

b. Pour tout polynôme $P \in A[X]$, on désigne par $I(P)$ l'idéal de A engendré par les coefficients de P. Soit $(P, Q) \in A[X]^2$. Montrer que si $I(P) = I(Q) = A$, alors $I(PQ) = A$. (On pourra utiliser le lemme de Krull.)

Exercice 10 : Algèbres entières

Soient K un corps et A une K-algèbre non nulle. On suppose que tout élément de A est *algébrique* sur K, i.e. pour tout $a \in A$, il existe $P \in K[X]$ tel que $P(a) = 0$.

a. Montrer que si A est intègre, alors A est un corps.

b. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

Exercice 11 : Anneaux locaux

Un anneau est dit *local* lorsqu'il possède un et un seul idéal maximal.

a. Montrer que les éléments inversibles d'un anneau local sont exactement ceux qui ne sont pas dans l'idéal maximal. En déduire qu'un anneau est local si, et seulement si, l'ensemble de ses éléments non inversibles forme un idéal.

b. Montrer que l'anneau $K[[T]]$ des séries formelles sur un corps K est un anneau local.

Exercice 12 : Éléments nilpotents, racine d'un idéal

Soit A un anneau. Un élément $a \in A$ est dit *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^k = 0$. On note $nil(A)$, et on appelle *nilradical* de A, l'ensemble des éléments nilpotents de A. On dit que l'anneau A est *réduit* si $nil(A) = \{0\}$.

a. Montrer que $nil(A)$ est un idéal, puis que $A/nil(A)$ est un anneau réduit.

Soit I un idéal de A. La *racine* de I est l'ensemble $\sqrt{I} = \{a \in A, \exists k \in \mathbb{N},\ a^k \in I\}$. On dit que l'idéal I est *radical* lorsque $\sqrt{I} = I$.

b. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal contenant I, et qu'il est radical. Quel est l'idéal $\sqrt{(0)}$?

c. Montrer que la fonction $I \mapsto \sqrt{I}$ est croissante vis-à-vis de l'inclusion.

d. Montrer qu'un idéal premier est radical.

e. Montrer que $nil(A/I) = \sqrt{I}/I$. En déduire que I est radical si, et seulement si, A/I est réduit.

f. Montrer que $nil(A)$ est égal à l'intersection de tous les idéaux premiers de A. On pourra utiliser le lemme de Zorn, après en avoir rappelé l'énoncé. (*Indication :* si $a \notin nil(A)$, considérer l'ensemble des idéaux ne contenant aucune puissance de a.)

g. Montrer que la projection canonique $\pi : A \to A/I$ induit une bijection entre les idéaux premiers de A contenant I et les idéaux premiers de A/I. En déduire que $\sqrt{I}$ est égal à l'intersection des idéaux premiers contenant I.

h. Dans un anneau principal, donner un moyen simple de calculer la racine d'un idéal (on pourra utiliser la décomposition en facteurs irréductibles). *Application :* dans $\mathbb{Q}[X]$, calculer la racine de l'idéal $I = (X^3(X-1))$.