Université de Rennes 1 – UFR de Mathématiques
Master mathématiques 1 - 2006-2007 – UE H03 « Courbes algébriques »

Examen du 12 juin 2007 : corrigé
Durée : 2 heures

Notations : k désigne un corps algébriquement clos, $n \geq 1$ un entier.

Exercice 1 (3 points). Soit $f : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ le morphisme $(x, y) \mapsto (xy, y)$. (On suggère de noter (u, v), par exemple, les coordonnées dans l'espace $\mathbb{A}^2_k$ d'arrivée).
L'image de f est-elle ouverte (pour la topologie de Zariski dans $\mathbb{A}^2_k$) ? Est-elle fermée ? (Justifier les réponses).

L'image Z de f est l'ensemble des $(u, v) \in k^2$ tels que $u = v = 0$ ou $v \neq 0$. Son intersection avec la droite $u = 1$ est l'ensemble des $(1, v)$ avec $v \neq 0$ qui est un sous-ensemble infini strict de cette droite, donc Z n'est pas fermé. L'intersection de Z avec la droite $v = 0$ est l'origine, donc Z n'est pas ouvert.

Exercice 2 (3 points). Montrer que tout morphisme $f : \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^1_k$ est surjectif ou constant. (Indication : pour λ dans k on pourra considérer la fonction $f - \lambda$).

Soit $f : \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme : il est donné par un polynôme que nos noterons encore f. Supposons f non surjectif : il existe $\lambda \in k$ tel que $f(x) \neq \lambda$ pour tout $x \in \mathbb{A}^n_k$. Autrement dit, la fonction $f - \lambda$ ne s'annule pas sur $\mathbb{A}^n_k$ donc $\mathscr{Z}(f - \lambda) = \emptyset$, donc $f - \lambda$ est inversible dans $k[X_1, \ldots, X_n]$ puisque k est algébriquement clos (théorème des zéros faible). Comme les seuls polynômes inversibles sont les constantes non nulles on en déduit que $f - \lambda$ (donc aussi f) est constant, cqfd.

Exercice 3 (2 points) – Soit $F \in k[X, Y, Z]$ un polynôme homogène non constant. On suppose que F n'a que des points simples dans $\mathbb{P}^2_k$. Déduire du théorème de Bézout que F est irréductible.

Supposons que $F = GH$ avec G et H non constants. On sait alors que G et H sont homogènes, et le théorème de Bézout entraîne donc que $\mathscr{Z}_{\text{proj}}(G)$ et $\mathscr{Z}_{\text{proj}}(H)$ ont au moins un points commun dans $\mathbb{P}^2_k$. Un tel point P est nécessairement singulier sur F, contradiction.

Exercice 4 (6 points). On considère le k-espace vectoriel $E := \mathrm{M}_n(k)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans k. On identifie E à $\mathbb{A}^{n^2}_k$ en prenant comme coordonnées d'une matrice ses n^2 coefficients.
Pour tout entier r tel que $0 \leq r \leq n$, on note $Y_r \subset E$ l'ensemble des matrices de rang r, et Z_r l'ensemble des matrices de rang $\leq r$.
(1) Déterminer Z_0 et Z_n, et montrer que Z_{n-1} est une hypersurface.

On a $Z_0 = \{0\}$ (la matrice nulle) et $Z_n = E$. D'autre part $Z_{n-1} = \mathscr{Z}(\det)$ où « det » est le déterminant, vu comme fonction polynomiale sur E.

(2) Montrer que tous les Z_r sont des ensembles algébriques. En déduire que pour chaque r, Y_r est ouvert dans Z_r (pour la topologie de Zariski).

Une matrice $M \in E$ est de rang $\leq r$ si et seulement si tous ses mineurs d'ordre $r+1$ sont nuls, donc Z_r est algébrique puisque les mineurs sont des fonctions polynomiales. Il en résulte que Y_r est ouvert dans Z_r puisque $Y_r = Z_r \setminus Z_{r-1}$.

(3) Montrer que Y_r est un ensemble algébrique si et seulement si $r = 0$. (On suggère de considérer les matrices diagonales).

Il est clair que $Y_0 = \{0\}$ est algébrique. Pour $r > 0$ et $t \in k$, soit $M(t)$ la matrice diagonale dont les r premiers coefficients sont égaux à r, les autres étant nuls. L'ensemble D des $M(t)$ est une droite de E. De plus le rang de $M(t)$ est r si $t \neq 0$, et est nul si $t = 0$, donc $Y_r \cap D = D \setminus \{0\}$ est infini et n'est pas égal à D, donc n'est pas algébrique et Y_r non plus.

Exercice 5 (6 points) – On désigne par I un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$, et l'on pose :

$$A := k[X_1, \ldots, X_n]/I, \quad V = \mathscr{Z}(I), \quad J = \mathscr{I}(V).$$

On demande de répondre par « vrai » (= toujours vrai) ou « faux » (= parfois faux) à chacune des assertions suivantes, sans justifier les réponses.
Barème : $+1$ par réponse correcte, -1 par réponse incorrecte, 0 par abstention. Attention, *la note de cet exercice peut être négative.*

Assertion	**V/F**	**Commentaire ou exemple**
$J \subset I$	Faux	$n = 1$, $I = (X_1^2)$, $V = \{0\}$, $J = (X_1)$
si J est premier, alors V est irréductible	Vrai	résultat du cours
si I est premier, alors $I = J$	Vrai	$J = \sqrt{I}$ (th. des zéros)
si V est irréductible, alors I est premier	Faux	$n = 1$, $I = (X_1^2)$, $V = \{0\}$, $J = (X_1)$
si I est premier, alors A est intègre	Vrai	définition d'un idéal premier
si A est intègre, alors I est premier	Vrai	définition d'un idéal premier