GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Variétés abéliennes polarisées sur les corps de fonctions.* Note (*) de **Laurent Moret-Bailly**, présentée par Jean-Pierre Serre.

On donne un théorème de famille limitée pour les variétés abéliennes polarisées à réduction semi-stable sur un corps de fonctions, lorsque l'on fixe le lieu de mauvaise réduction et le degré du dualisant relatif. On en déduit un théorème de Zarhin, conjecturé par Tate sur les endomorphismes des variétés abéliennes sur les corps de fonctions à corps de base fini ([1]).

ALGEBRAIC GEOMETRY. — Polarized Abelian Varieties over Function Fields.

We give a bounded family theorem for polarized Abelian varieties with semistable reduction over a function field, when the bad reduction locus and the degree of the relative dualizing sheaf are given. We deduce a theorem of Zarhin, conjectured by Tate, on the endomorphisms of Abelian varieties over a function field with finite ground field.

Dans tout ce qui suit, S désigne un schéma noethérien régulier connexe de dimension 1, η son point générique, $F = K(\eta)$ son corps de fonctions rationnelles. Soit $A \xrightarrow{f} S$ un S-schéma en groupes lisse dont la fibre générique A_η est une variété abélienne sur F. On supposera de plus que A est *semi-stable* sur S, c'est-à-dire que ses fibres ont un radical unipotent nul. On pose $g = \dim A_\eta$, on note $\varepsilon_A : S \to A$ la section unité, $\omega_{A/S} = \Lambda^g \Omega^1_{A/S}$ le faisceau dualisant relatif, et on pose $\bar{\omega}_{A/S} = \varepsilon_A^* (\omega_{A/S})$. Si L est un faisceau inversible sur A, on supposera toujours que :

(I) L est muni d'une rigidification $\alpha : \mathcal{O}_S \simeq \varepsilon_A^* (L)$.

(II) L satisfait au théorème du cube, autrement dit le faisceau $\Theta(L)$ sur $A \times_S A \times_S A$ défini par :

$$\Theta(L)(x, y, z) = L(x+y+z) \otimes L(x+y)^{-1} \otimes L(x+z)^{-1} \otimes L(y+z)^{-1} \otimes L(x) \otimes L(y) \otimes L(z),$$

est trivial.

REMARQUES. — Il existe alors une unique trivialisation de $\Theta(L)$ qui soit compatible avec α sur la section unité, *via* l'isomorphisme naturel $\varepsilon_{A^3}^* \Theta(L) \simeq \varepsilon_A^* (L)$. Cette trivialisation est une « structure cubiste », ou « structure du cube » au sens de [1].

D'autre part, étant donné un faisceau inversible L_η sur A_η, il existe un revêtement fini $S' \xrightarrow{\pi} S$, étale aux points où A a bonne réduction, et un unique faisceau inversible L sur $A \times_S S'$, prolongeant $L_\eta \times_S S'$, et vérifiant (I) et (II) (*cf.* [1]). Enfin si L_η est ample sur A_η, alors L est ample relativement à *f*, et $f_* L$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang fini.

LE GROUPE $\mathcal{G}(L)$. — Soient A^t_η la variété duale de A_η et A^t son modèle de Néron. Au faisceau inversible L_η est associé (*cf.* [2]) un homomorphisme naturel :

$$\varphi_{L_\eta} : \quad A_\eta \to A^t_\eta,$$
$$x \mapsto \text{classe de } T_x^* (L_\eta) \otimes L_\eta^{-1}.$$

On note $\varphi_L : A \to A^t$ le prolongement de φ_{L_η} (déduit de la propriété universelle du modèle de Néron A^t) et on pose $K(L) = \operatorname{Ker} \varphi_L$: c'est un sous-schéma en groupes fermé de A, quasi-fini sur S si L_η est ample.

On peut alors définir un S-schéma en groupes $\mathcal{G}(L)$, extension centrale de $K(L)$ par $\mathbb{G}_{m,S}$, possédant les propriétés suivantes :

(i) le $\mathbb{G}_m$-torseur sur $K(L)$ sous-jacent à $\mathcal{G}(L)$ s'identifie à la restriction à $K(L)$ du torseur associé à L.

(ii) $\mathcal{G}(L)$ opère à gauche sur L de façon compatible à l'action de $K(L)$ sur A par translations.

(iii) $\mathcal{G}(L)_\eta$ s'identifie au groupe $\mathcal{G}(L_\eta)$ de [2], § 23.

Comme extension centrale de $K(L)$ par $\mathbb{G}_m$, $\mathcal{G}(L)$ définit (*via* les commutateurs) un accouplement alterné $e^L : K(L) \times K(L) \to \mathbb{G}_{m,S}$. D'autre part, grâce à (ii) ci-dessus, $\mathcal{G}(L)$ opère sur les $\mathcal{O}_S$-modules $R^i f_*(L) (i \geqq 0)$.

THÉORÈME 1. — *On suppose* $K(L)$ fini *sur* S : *alors* $\mathcal{G}(L)$ *est un groupe thêta non dégénéré; autrement dit, la forme* e^L *définit un isomorphisme de* $K(L)$ *avec son dual de Cartier.*

Notons que lorsque $K(L)$ est d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles de S, ce résultat est immédiat à partir du cas classique des variétés abéliennes.

Je dois le théorème suivant à D. Mumford :

THÉORÈME 2. — *On suppose que* L_η *est* ample. *Pour tout* $n \geqq 1$ *on note* $A^{[n]}$ *le plus petit sous-groupe ouvert de* A *contenant* $K(L^{\otimes n})$, *et* $f^{[n]} : A^{[n]} \to S$ *le morphisme structural.*

(i) *Pour tout* $n \geqq 2$, *le morphisme canonique :*

$$f^{[n]*} f_*^{[n]} (L^{\otimes n}_{|A^{[n]}}) \to L^{\otimes n}_{|A^{[n]}},$$

est surjectif.

(ii) *Si* $K(L^{\otimes 2})$ *est fini sur* S *et si* L *est symétrique, alors les morphismes de restriction* $f_*(L) \to f_*^{[2]}(L_{|A^{[2]}})$ *et* $f_*(L^{\otimes 2}) \to f_*^{[2]}(L^{\otimes 2}_{|A^{[2]}})$ *sont des isomorphismes.*

La démonstration de (i) est classique à partir du « théorème du carré ». Celle de (ii) utilise la théorie des représentations des groupes thêta ([3], appendice). La première assertion de (ii) montre, en d'autres termes, que dans le cas ample symétrique l'image directe ne dépend pas du choix du modèle semi-stable pourvu que celui-ci soit assez gros pour que $K(L^{\otimes 2})$ soit fini sur S.

THÉORÈME 3. — *On suppose que* S *est une courbe lisse et connexe sur un corps* k *de caractéristique* $p \geqq 0$, *que* L *est symétrique et ample relativement à* f, *et que* $K(L^{\otimes 2})$ *est fini sur* S. *On note* d *le rang du* $\mathcal{O}_S$-*module* $f_*(L)$, *et* $\delta(A, L)$ *le* $\mathcal{O}_S$-*module inversible* $(\Lambda^d f_*(L))^{\otimes 2} \otimes \bar{\omega}_{A/S}^{\otimes d}$. *Alors :*

(i) $\delta(A, L)$ *est d'ordre fini dans* Pic (S) *dans chacun des deux cas suivants :*

(*a*) $p > 0$,

(*b*) A *est un* S-*schéma abélien.*

(ii) *Si* S *est propre sur* k, *alors* $\deg_S \delta(A, L) = 0$.

Le cas (i) (*b*) lorsque $p \nmid d$ a été démontré par L. Szpiro et l'auteur grâce au théorème de Riemann-Roch relatif. Si $p = 0$, ce cas peut aussi se déduire de l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann.

On suppose désormais que S est une courbe propre, lisse et connexe sur un corps k. On déduit alors du théorème 3 le :

THÉORÈME 4. — *Le* $\mathcal{O}_S$-*module inversible* $\bar{\omega}_{A/S}$ *est de degré* $\geqq 0$; *il est de degré* 0 *si et seulement si* A *est isotrivial sur* S (*c'est-à-dire s'il existe un revêtement fini* $S' \to S$ *tel que* $A \times_S S'$ *soit constant sur* S').

On suppose maintenant $p \neq 2$, et on se donne une suite $\underline{\delta}=(d_1, \ldots, d_g)$ d'entiers >0 vérifiant $8 \mid d_{i+1} \mid d_i$ et $p \nmid d_1$. On note $\mathcal{G}_k(\underline{\delta})$ (*cf.* [4]) le groupe de Heisenberg de type $\underline{\delta}$ sur k $\left[\text{qui est une extension centrale de } \bigoplus_{i=1}^{g} (\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \times \mu_{d_i})_k \text{ par } \mathbb{G}_{m,k}\right]$ et $V_k(\underline{\delta})$ sa représentation standard de poids 1, notée $V_{\delta, k}$ dans [4], § 6.

DÉFINITION. — *Une* donnée de type $\underline{\delta}$ *sur le corps* $F=k(S)$ *est un couple* (A_F, L_F) *où :*

— A_F *est une variété abélienne de dimension g sur* F, *à réduction semi-stable sur* S;

— L_F *est un faisceau inversible sur* A_F, *ample, totalement symétrique, rigidifié et de type* $\underline{\delta}$, *c'est-à-dire que* $K(L_F)_{\bar{F}} \simeq \bigoplus_{i=1}^{g} (\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \times \mu_{d_i})_{\bar{F}}$ *où* $\bar{F}$ *désigne une clôture algébrique de* F.

DÉFINITION. — *Soit* (A_F, L_F) *une donnée de type* $\underline{\delta}$ *sur* F. *Une* structure thêta étendue *sur* (A_F, L_F) *est la donnée :*

— *d'un modèle semi-stable* $A \xrightarrow{f} S$ de A_F (*c'est-à-dire d'un sous-groupe ouvert du modèle de Néron de* A_F *sur* S);

— *d'un faisceau inversible* L *sur* A *prolongeant* L_F *et vérifiant* (I) *et* (II);

— *d'un isomorphisme* $\lambda : \mathcal{G}(L) \rightarrow \mathcal{G}_k(\underline{\delta})_S$, *induisant l'identité sur les sous-groupes* $\mathbb{G}_{m,S}$, *et symétrique au sens de* ([4], § 2, *p.* 317) [*il est clair que l'on peut ici définir un automorphisme* D_{-1} *de* $\mathcal{G}(L)$ *analogue à celui de* loc. cit.].

Soit (A_F, L_F) une donnée de type $\underline{\delta}$, munie d'une structure thêta étendue (A, L, λ). Notons $\Sigma(A_F)$ l'ensemble des points de S où A a mauvaise réduction, et posons $e(A_F)=\deg_S \bar{\omega}_{A/S}$: ces deux objets ne dépendent que de A_F. On peut alors définir comme dans ([4], § 6), un morphisme :

$$t(A, L, \lambda) : S \to P(\underline{\delta}) = \mathbb{P}(V_k(\underline{\delta})),$$

qui coïncide, sur l'ouvert $S-\Sigma(A_F)$, avec le morphisme canonique à valeurs dans le schéma de modules $M_{\underline{\delta}} \subset P(\underline{\delta})$ de ([4], § 6, th., p. 83). De plus on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_S$-modules :

$$f_*(L) \simeq V_k(\underline{\delta}) \otimes_k t(A, L, \lambda)^*(\mathcal{O}_{P(\underline{\delta})}(-1)).$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \deg_S t(A, L, \lambda)^*(\mathcal{O}_{P(\underline{\delta})}(1)) &= -\frac{1}{d_1 \ldots d_g} \deg_S f_*(L) \\ &= \frac{1}{2} \deg_S \bar{\omega}_{A/S} \quad \text{(th. 3)} \\ &= \frac{1}{2} e(A_F). \end{aligned}$$

Comme $M_{\underline{\delta}}$ est un schéma de modules fin pour les variétés abéliennes polarisées munies d'une structure thêta, on a finalement :

THÉORÈME 5. — *Soit e un entier. Les données* (A_F, L_F) *de type* $\underline{\delta}$, *possédant une structure thêta étendue et telles que* $e(A_F) \leqq e$, *forment une famille limitée sur* k (*i. e. sont paramétrées par un k-schéma de type fini*).

L'hypothèse de l'existence d'une structure thêta étendue est tempérée par le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *On suppose k fini ou séparablement clos. Soit* Σ *un ensemble fini de points fermés de* S. *Il existe un revêtement fini* $S' \to S$, *étale au-dessus de* $S - \Sigma$, *ne dépendant que de* Σ *et* $\underline{\delta}$, *tel que pour toute donnée* (A_F, L_F) *de type* $\underline{\delta}$ *sur* F *telle que* $\Sigma(A_F) \subset \Sigma$, *la donnée induite sur* S' *possède une structure thêta étendue.*

Rappelons que les théorèmes 5 et 6 supposent $p \neq 2$ et $p \nmid \deg(L_F)$. Toutefois, en remplaçant les structures thêta par d'autres types de structures de niveau, on peut démontrer des analogues de ces théorèmes sans ces deux hypothèses et en déduire, sans restriction sur p, le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *On suppose k fini. Soient* A_F *une variété abélienne sur* F *et d un entier. Alors l'ensemble des classes de* F*-isomorphisme de couples* (B_F, L_F), *où* B_F *est une* F*-variété abélienne telle qu'il existe une* F*-isogénie* $A_F \to B_F$ *de degré premier à p, et* L_F *un faisceau inversible ample de degré* d^2 *sur* B_F, *est fini.*

Lorsque $p \nmid d$, ce théorème est dû à Zarhin [5] dans le cas $p \neq 2$ et à S. Mori (non publié) dans le cas $p=2$. Indiquons brièvement la démonstration : on peut supposer que A_F a réduction semi-stable sur S; il en est alors de même des B_F et l'on a $\Sigma(B_F) = \Sigma(A_F)$. D'après le théorème 6 on peut donc supposer de plus que les (B_F, L_F) admettent une structure thêta étendue (ou une structure de niveau convenable). L'hypothèse d'isogénie implique que $e(B_F) = e(A_F)$, et l'on applique le théorème 5.

Enfin, Zarhin [6] a montré que le théorème 7 implique le théorème suivant, conjecturé par Tate :

THÉORÈME 8. — *On suppose k fini. Soient* F_s *une clôture séparable de* F, $G = \mathrm{Gal}(F_s/F)$, *et soit* A_F *une variété abélienne sur* F. *Alors pour tout nombre premier* $l \neq p$, *l'homomorphisme canonique :*

$$\mathrm{End}_F(A_F) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_l \to \mathrm{End}_G(T_l(A_{F_s})),$$

est un isomorphisme, T_l *désignant le module de Tate l-adique.*

COMPLÉMENTS. — On a des théorèmes analogues pour les corps de fonctions de plusieurs variables. En *caractéristique nulle* on peut supprimer, dans le théorème 6, l'hypothèse de semi-stabilité sur A_F. Pour le théorème 5, L. Szpiro et l'auteur dans le cas $\Sigma = \emptyset$, et récemment G. Faltings dans le cas général, ont montré que $e(A_F)$ est borné lorsqu'on fixe $\Sigma(A_F)$.

(¹) Une partie de ce travail a été réalisée à l'Institute for Advanced Study de Princeton, grâce à une subvention de la National Science Foundation.

(*) Remise le 10 janvier 1983.

[1] L. BREEN, *Fonctions thêta et théorème du cube* (à paraître).

[2] D. MUMFORD, *Abelian Varieties*, Oxford University Press.

[3] T. SEKIGUCHI, *J. Math. Soc. Japan*, 29, 1977.

[4] D. MUMFORD, I, *Invent. Math.*, 1, 1966, p. 287-354; II, *Invent. Math.* 3, 1967, p. 75-135.

[5] Ju. G. ZARHIN, *Funct. Anal. and Appl.*, 8, 1974.

[6] Ju. G. ZARHIN, *Math. U.S.S.R. Izvestija*, 9, nº 2, 1975.

E.R.A. nº 653, Bât. 425, *Université de Paris-Sud* 91405 *Orsay Cedex.*