Construction de revêtements de courbes pointées

Laurent Moret-Bailly

IRMAR (Institut de Recherche Mathématique de Rennes,
UMR 6625 du CNRS)
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
F-35042 Rennes Cedex
moret@univ-rennes1.fr
http://www.maths.univ-rennes1.fr/~moret/ *

*Accepted for publication in *Journal of Algebra* as of December 2000.

Résumé

Si k est un corps fertile (« large field » chez F. Pop), G un k-schéma en groupes fini étale et X un G-torseur, on construit un G-revêtement ramifié $C \to \mathbb{P}^1_k$ (où C est lisse et géométriquement connexe sur k) induisant en $0 \in \mathbb{P}^1(k)$ le torseur X. Lorsque k est de caractéristique nulle, c'est un résultat récent de Colliot-Thélène. On termine l'article par des commentaires sur l'utilisation du langage des champs algébriques dans ce type de problème.

Abstract

If k is a "large field", in the sense of F. Pop, G a finite étale k-group scheme, and X a G-torsor, we construct a ramified G-covering $C \to \mathbb{P}^1_k$ (where C is smooth and geometrically connected over k) inducing at $0 \in \mathbb{P}^1(k)$ the given X. When k has characteristic zero, this was proved recently by Colliot-Thélène. We end with some comments on how the language of algebraic stacks can be used for such problems.

AMS 1991 subject classification: 14E20, 14H30, 12F12, 14H10.

Proposed running head: Construction de revêtements

1 Introduction

On établit dans cet article le théorème suivant (pour des énoncés plus précis, voir plus bas, 2.5 à 2.9) :

1.1 Théorème. *Soient k un corps fertile* (« large field » dans [P 2]), Γ *une courbe projective, lisse et connexe sur k, $\varepsilon \in \Gamma(k)$ un point rationnel, G un k-schéma en groupes fini étale, X un G-torseur sur k.*

Alors il existe :

(i) *une k-courbe projective, lisse et géométriquement connexe C, et un k-morphisme $\pi : C \to \Gamma$;*

(ii) *une action fidèle de G sur C, faisant de π un G-torseur au-dessus d'un ouvert de Γ contenant ε ;*

(iii) *un isomorphisme $\pi^{-1}(\varepsilon) \xrightarrow{\sim} X$ de G-torseurs.*

1.2 Remarques.

1.2.1 Il est facile (cf. 2.2.1) de se ramener au cas où $\Gamma = \mathbb{P}^1_k$; dans ce cas, Colliot-Thélène [CT] démontre ce théorème dans le cas particulier où G est constant (hypothèse d'ailleurs non essentielle dans [CT]), et où k est de caractéristique nulle ; cette dernière restriction est due essentiellement à l'utilisation de la résolution des singularités et de résultats fins de Kollár [Ko] sur la connexité rationnelle, dont nous faisons ici l'économie.

1.2.2 Il serait tentant d'essayer d'imposer la structure d'un G-revêtement en plus d'un point de $\mathbb{P}^1_k$: si l'on essaie de le faire par les méthodes de cet article, on aboutit à un revêtement d'une courbe qui n'est pas de genre 0. De fait, Colliot-Thélène montre dans l'appendice de [CT] qu'il existe (pour $k = \mathbb{Q}_2$ et $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ par exemple) deux G-torseurs X et Y sur k tels qu'aucun G-revêtement (géométriquement irréductible) de $\mathbb{P}^1_k$ n'admette X et Y comme fibres en deux points rationnels.

1.2.3 Lorsque l'on oublie le G-torseur X, on obtient notamment (en prenant G constant) le fait que, pour k fertile, tout groupe fini est groupe de Galois d'une extension régulière de $k(t)$. C'est là, d'une part, un cas particulier d'un théorème de Pop ([P 2], Main Theorem A, qui traite plus généralement les « problèmes de plongement »), et d'autre part, comme expliqué dans ([Hb 4], 4.5) un corollaire du cas particulier, dû à Harbater [Hb 2], où k est un corps de séries formelles. Par ailleurs, des cas particuliers étaient connus auparavant, notamment celui où k est séparablement clos ([Hb 1], bien que le résultat n'y soit énoncé que pour k algébriquement clos).

Enfin la version « sans X » de 1.1 peut sans doute aussi se déduire des résultats de [Hb-S].

1.2.4 Haran et Jarden donnent dans [Ha-J] une autre démonstration du théorème 1.1 (au moins lorsque le groupe G est constant).

1.2.5 Pour G constant, k quelconque, et X connexe (*i.e.* spectre d'une extension de k, galoisienne de groupe G) le problème de l'existence d'un revêtement comme en 1.1 avec $\Gamma = \mathbb{P}^1_k$ est connu des experts sous le nom de « problème de Beckmann et Black ».

1.3 Principe de la démonstration et plan de l'article.

Au §2 on donne les définitions de base et les énoncés des théorèmes.

Au §3, on présente succinctement, faute de référence satisfaisante, la technique (bien connue, au moins sous forme de dessins, lorsque la base est un corps) d'attachement de schémas le long de sous-schémas fermés, qui est à la base des constructions qui suivent.

Les démonstrations proprement dites occupent les §§ 4 et 5. Elles sont pour l'essentiel classiques et proches notamment de [Hb-S] dont on utilise d'ailleurs un résultat de façon essentielle.

On commence par prouver, au §4, l'existence d'un revêtement convenable d'une courbe de genre 0 à singularités ordinaires (théorème 2.5) : par « assemblage » de revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1$ on obtient un tel revêtement sur une extension séparable k' de k ; la « descente » à k (terme impropre : on construit un revêtement défini sur k qui ne redonne pas le revêtement d'origine sur k') est ensuite effectuée (4.6) par assemblage avec un G-torseur constant, en adaptant un argument de Kollár trouvé dans [CT] (le « peigne » de *loc. cit.*, §1, (6)).

Il est à noter que les constructions du §4 sont effectuées sur un schéma de base aussi général que possible ; ce souci, dont l'auteur espère qu'il sera utile, est ici, malheureusement, contrarié *in extremis* par l'apparition d'une hypothèse (condition $(*)$ du théorème 4.7) dont la vérification, en dehors du cas d'un corps, semble difficile.

Au §5, le revêtement « dégénéré » obtenu précédemment est déformé, grâce à un argument de « formal patching » à la Harbater [Hb-S], en un revêtement au-dessus de Spec $k[[t]]$ induisant sur $k((t))$ un revêtement du type voulu (théorème 2.6). On applique alors le théorème d'approximation d'Artin pour en déduire un revêtement analogue sur l'hensélisé de Spec $k[t]$ à l'origine, puis sur une k-courbe lisse ayant un point rationnel (corollaire 2.7) ; il suffit ensuite de remarquer que, si k est fertile, cette courbe a une infinité de points rationnels.

Au §6, on donne divers compléments et remarques : variantes des démonstrations, informations sur la ramification, cas modérément ramifié, traductions dans le langage des champs algébriques. Dans le cas modérément ramifié, on obtient ainsi une démonstration du théorème principal qui n'utilise pas le §5 (ni, par conséquent, les résultats de [Hb-S]).

L'utilisation, au §6, du langage des champs algébriques nécessite des résultats connus mais non explicités (à la connaissance de l'auteur) dans la littérature ; pour le confort du lecteur, ils sont établis au §7.

2 Définitions et énoncés

2.1 Courbes nodales, courbes nodales pointées.

Soit S un schéma. Nous appellerons *S-courbe nodale* un S-schéma plat et de présentation finie sur S, dont les fibres géométriques sont des courbes réduites dont tous les points singuliers sont des points doubles ordinaires.

Si $\Gamma \xrightarrow{f} S$ est une S-courbe nodale, l'ouvert de lissité de f sera noté $\mathrm{Reg}\,(\Gamma/S)$; son complémentaire admet une structure naturelle de sous-schéma fermé de Γ, non ramifié sur S, commutant à tout changement de base et qui sera noté $\mathrm{Sing}\,(\Gamma/S)$.

Une courbe nodale sera dite *connexe* si ses fibres géométriques sont connexes et non vides. Le *genre* d'une courbe nodale propre et connexe $\Gamma \xrightarrow{f} S$ est par définition le rang (localement constant sur S) de $\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{O}_\Gamma$. (Lorsque nous parlerons du genre d'une S-courbe nodale, il sera implicitement supposé que celle-ci est propre et connexe).

Une *S-courbe nodale pointée* est un couple $(\Gamma \xrightarrow{f} S,\ \varepsilon)$ où $\Gamma \xrightarrow{f} S$ est une S-courbe nodale *propre et connexe* et $\varepsilon : S \to \Gamma$ une section à valeurs dans $\mathrm{Reg}\,(\Gamma/S)$. On parlera de *S-courbe lisse pointée* si de plus Γ est lisse sur S.

2.1.1 Remarque. Si S est local hensélien (par exemple le spectre d'un corps), toute S-courbe nodale propre $\Gamma \xrightarrow{f} S$ est automatiquement un S-schéma projectif. Pour le voir, on remarque qu'il existe un diviseur effectif $D \subset \mathrm{Reg}\,(\Gamma/S)$ qui est fini étale sur S et rencontre toutes les composantes des fibres de f ; un tel diviseur est automatiquement ample pour f.

En conséquence, pour S quelconque, toute S-courbe nodale propre est projective localement pour la topologie étale sur S. Pour les besoins du présent article (au moins jusqu'au §5 inclus), il n'y aurait d'ailleurs pas d'inconvénient à restreindre la notion de courbe nodale aux S-schémas localement quasi-projectifs sur S pour la topologie de Zariski. Toutefois la « bonne » notion est certainement celle, plus générale, de *S-espace algébrique* ([Kn], [L-MB]), pour laquelle on se heurte malheureusement à l'insuffisance des références. D'ailleurs, l'utilisation du langage des champs algébriques à la fin de l'article a forcé l'auteur à élargir la définition des courbes nodales (propres) à partir de 6.3 ; ceci ne conduit à aucun conflit sérieux, les principaux résultats étant déjà démontrés à ce stade et les deux définitions concurrentes étant en fait équivalentes lorsque la base est le spectre d'un corps, ou même d'un anneau local hensélien.

2.1.2 Courbes de genre 0. On rappelle qu'une courbe nodale propre et connexe Γ, sur un corps k séparablement clos, est de genre 0 si et seulement si :

(i) chacune de ses composantes irréductibles est isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$;

(ii) Γ est « sans circuit ».

L'assertion résulte par exemple de ([B-L-R], 9, Example 8) et du fait que le genre est la dimension du schéma de Picard.

La seconde condition signifie que le graphe des composantes de Γ est un arbre ; ou, de façon équivalente, que pour tout point singulier x de Γ, $\Gamma \setminus \{x\}$ n'est pas connexe.

Si $(\Gamma \xrightarrow{f} S,\ \varepsilon)$ est une S-courbe *lisse pointée* de genre 0, alors Γ est isomorphe à $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ pour un $\mathcal{O}_S$-Module $\mathcal{E}$ localement libre de rang 2, à savoir $\mathcal{E} = f_*\mathcal{O}_\Gamma(\varepsilon)$. En particulier, si S est semi-local (par exemple spectre d'un corps), $(\Gamma \xrightarrow{f} S,\ \varepsilon)$ est isomorphe à $(\mathbb{P}^1_S, \eta)$, où η désigne n'importe quelle section de $\mathbb{P}^1_S$, par exemple la section nulle.

2.2 Revêtements.

Soient S un schéma et G un S-schéma en groupes fini étale. Si $\Gamma \xrightarrow{f} S$ est une S-courbe nodale *propre et connexe*, un *G-revêtement* de Γ est un couple $(C \xrightarrow{\pi} \Gamma,\ \rho)$ où π est un S-morphisme fini localement libre de courbes nodales et $\rho : C \times_S G \to C$ une action à droite de G sur C, telle qu'il existe un ouvert U de Γ vérifiant les conditions suivantes :

(i) U est dense dans chaque fibre de $\Gamma \to S$, et $\pi^{-1}(U)$ contient $\mathrm{Sing}\,(C/S)$;

(ii) $\pi_U : \pi^{-1}(U) \to U$ fait de $\pi^{-1}(U)$ un $G \times_S U$-torseur.

Un tel G-revêtement sera dit *connexe* si C est une courbe nodale connexe.

Noter que les conditions (i) et (ii) entraînent que π est étale en tout point de $\mathrm{Sing}\,(C/S)$. En particulier, C est lisse sur S si et seulement si Γ est lisse sur S ; nous parlerons dans ces conditions de *G-revêtement lisse.*

Si X est un G-torseur sur S et $(\Gamma \xrightarrow{f} S,\ \varepsilon)$ une S-courbe nodale pointée, un *$(G,\ X)$-revêtement* de (Γ, ε) est un G-revêtement π comme ci-dessus, muni d'un isomorphisme $\alpha : X \to C \times_{\pi,\Gamma,\varepsilon} S$ respectant les actions de G. Un tel revêtement sera parfois désigné par C ou par π, pour abréger.

Dans la suite, nous ne considérerons que le cas où Γ est de genre 0, en raison du fait élémentaire suivant :

2.2.1 Proposition. *Soient k un corps infini, C et Y deux k-courbes projectives, lisses et géométriquement irréductibles, y un point rationnel de Y, $\pi : C \to \Gamma = \mathbb{P}^1_k$ un morphisme étale au-dessus de 0. Alors il existe un k-morphisme $f : Y \to \Gamma$ envoyant y sur 0, tel que le produit fibré $C \times_{\pi,\Gamma,f} Y$ soit géométriquement irréductible sur k.*

Démonstration. (détails laissés au lecteur). Utilisant le fait que $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ est simplement connexe, on voit qu'il suffit de choisir f de telle sorte que son lieu de ramification dans Γ soit disjoint de celui de π. On peut pour cela partir d'un f_0 quelconque envoyant y sur 0, et le composer avec un automorphisme convenable de Γ en utilisant le fait que k est infini (mais l'énoncé est très probablement vrai sans cette hypothèse). ∎

2.3 Définition. *Soient S un schéma, U un ouvert de S, G un S-schéma en groupes fini étale, X un G-torseur sur S. Nous dirons alors que :*

(i) *X est* réalisable *sur (S, U) s'il existe une S-courbe nodale pointée* (Γ, ε) de genre 0, et lisse au-dessus de U, *et un (G, X)-revêtement* connexe $\pi : C \to \Gamma$ *de* (Γ, ε).

(ii) *X est* réalisable *(sur S) s'il est réalisable sur $(S, \emptyset)$;*

(iii) *X est* fortement réalisable *(sur S) s'il est réalisable sur (S, S).*

2.3.1 Remarque. Si T est un S-schéma, muni d'un ouvert V, on dira plus généralement que X est *réalisable sur* (T, V) si $X_T = X \times_S T$ est réalisable sur (T, V).

L'expression « G est réalisable sur (S, U) » signifie simplement que le G-torseur trivial est réalisable sur (S, U).

Mêmes remarques pour les deux autres notions.

2.3.2 Remarque. D'après 2.1.2, il revient au même de dire que X est fortement réalisable, ou qu'il existe un (G, X)-revêtement connexe de $(\mathbb{P}^1_S, 0)$.

2.3.3 Remarque. Si G est *commutatif* et si X est réalisable sur (S, U), il en est de même de tout G-torseur X' : en effet, si $C \to \Gamma$ est un (G, X)-revêtement connexe, alors $C \times^G X^{-1} \times^G X' \to \Gamma$ est un (G, X')-revêtement connexe, où $\times^G$ désigne le produit contracté et X^{-1} le torseur opposé à X.

2.4 Définition. *Un corps k est dit* fertile *s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes (où $k((t))$ désigne le corps des séries de Laurent à une indéterminée t, à coefficients dans k) :*

(i) *pour tout k-schéma lisse connexe V, si $V(k) \neq \emptyset$ alors $V(k)$ est dense dans V ;*

(ii) *k est existentiellement clos dans $k((t))$, c'est-à-dire : pour tout k-schéma de type fini V, si $V(k((t))) \neq \emptyset$ alors $V(k) \neq \emptyset$.*

2.4.1 Remarque. Pour l'équivalence des deux propriétés, voir [P 2]. Il suffit de vérifier (i) lorsque $\dim V = 1$, auquel cas la densité signifie simplement que $V(k)$ est infini.

2.4.2 Remarque. La notion de corps fertile est due à Pop [P 2]. Les corps fertiles sont appelés « large fields » par Pop et Harbater, « ample fields » par Haran et Jarden, « corps amples » par Dèbes et Deschamps [Dè-Des].

2.4.3 Remarque. Voici quelques exemples de corps fertiles :

(i) les corps séparablement clos ;

(ii) les corps k pseudo-algébriquement clos (*i.e.* tels que tout k-schéma de type fini géométriquement irréductible ait un point rationnel) ;

(iii) les corps complets (ou plus généralement henséliens) pour une valeur absolue ;

(iv) les corps « pseudo-réels clos », ou « pseudo-p-adiquement clos » ;

(v) toute extension algébrique d'un corps fertile ;

(vi) pour p premier, tout corps k dont le groupe de Galois absolu est un pro-p-groupe ;

(vii) pour un ensemble fini Σ de places d'un corps global K, l'extension maximale K^Σ de K qui est totalement décomposée en chaque place de Σ (par exemple, le corps des nombres algébriques totalement réels est fertile).

La vérification est facile pour les exemples (i) à (iv). Pour (v), on se ramène au cas d'une extension finie, et l'on utilise la restriction de Weil. Pour (vi), dû à Colliot-Thélène, voir l'introduction de [CT].

Quant à (vii), c'est une conséquence immédiate, déjà remarquée par Pop [P 2], du « principe local-global » suivant : si V est un schéma lisse de type fini sur K^Σ, alors $V(K^\Sigma) \neq \emptyset$ si et seulement si $V((K^\Sigma)_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de K^Σ au-dessus d'une place de Σ. Ce fait est un cas particulier de ([MB], 1.3), obtenu en prenant $R = K$ avec les notations de *loc. cit.*; on en trouve une démonstration simplifiée dans [P 2].

Nous pouvons maintenant énoncer nos principaux résultats, dont les deux premiers seront démontrés plus loin :

2.5 Théorème. *Soient k un corps, G un k-schéma en groupes fini étale, et X un G-torseur. Alors X est réalisable sur k.*

Démonstration. Voir 4.8. ∎

2.6 Théorème. *Sous les hypothèses du théorème* 2.5*, soient $S = \operatorname{Spec} k[[t]]$ et U le point générique de S (où t est une indéterminée).*

Alors, pour tout (G,X)-revêtement $\pi_0 : C_0 \to \Gamma_0$ sur $\operatorname{Spec}(k)$, avec Γ_0 (nodale pointée) de genre 0, il existe un (G_S, X_S)-revêtement π qui induit π_0 modulo t et qui est lisse au-dessus de U.

En particulier (d'après 2.5*) X est réalisable sur (S,U).*

Démonstration. Voir le §5 ; pour la dernière assertion, on observera que si π_0 est connexe il en est de même de π. ∎

2.7 Théorème. *L'énoncé de* 2.6 *reste valable si l'on remplace $k[[t]]$ par l'hensélisé de $k[t]$ en l'idéal maximal (t).*

De façon équivalente, soit $\pi_0 : C_0 \to \Gamma_0$ un (G,X)-revêtement sur $\operatorname{Spec}(k)$*, avec Γ_0 (nodale pointée) de genre* 0 *; alors il existe une k-courbe affine lisse Y, un point $y \in Y(k)$ et un (G_Y, X_Y)-revêtement qui induit π_0 au-dessus de y et est lisse sur $Y \setminus \{y\}$.*

Démonstration. C'est une conséquence facile de 2.6 et du théorème d'approximation d'Artin ([Ar 1], Theorem 1.12).

De façon précise, soit A l'hensélisé en question (on identifie son complété à $k[[t]]$), et soit F le foncteur associant à toute k-algèbre R l'ensemble des classes d'isomorphie de $(G_{\operatorname{Spec}(R)}, X_{\operatorname{Spec}(R)})$-revêtements $C_R \to \Gamma_R$, où Γ_R est de genre 0. Alors il est immédiat que F est localement de présentation finie (il commute aux limites inductives filtrantes). Partons de π comme dans l'énoncé, et choisissons $\widehat{\pi} : \widehat{C} \to \widehat{\Gamma}$ relevant π_0 sur $k[[t]]$, et lisse au-dessus de $\operatorname{Spec} k((t))$. Si $\widehat{\Sigma}$ désigne le lieu singulier relatif de $\widehat{\Gamma}$, il existe $r > 0$ tel que $t^r \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} = 0$. Le théorème d'approximation entraîne l'existence d'un $(G_{\operatorname{Spec}(A)}, X_{\operatorname{Spec}(A)})$-revêtement $\widetilde{\pi} : \widetilde{C} \to \widetilde{\Gamma}$ qui coïncide avec $\widehat{\pi}$ modulo t^{r+1}. Ceci entraîne que le lieu singulier $\widetilde{\Sigma}$

de $\widetilde{\Gamma}$ a la propriété que $t^r\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} = 0$. Il n'est donc pas surjectif sur Spec (A), et $\widetilde{\Gamma}$ est donc lisse au point générique de Spec (A). ∎

2.8 Théorème. *Sous les hypothèses de* 2.5, *supposons de plus* k fertile. *Alors* X *est fortement réalisable sur* k.

Démonstration. Soient Y et y comme dans 2.7 : alors $Y \setminus \{y\}$ a un point rationnel, d'où la conclusion.

Variante : le théorème 2.8 peut se déduire directement de 2.6, en faisant l'économie du théorème d'Artin, comme suit (cf. [Hb 4], 4.5 et aussi [CT], preuve du théorème 2) : il résulte de 2.6 que (G, X) est fortement réalisable sur Spec $k((t))$. Il est donc fortement réalisable sur le spectre d'une sous-k-algèbre de type fini $A \subset k((t))$, donc sur un k-schéma de type fini T tel que $T(k((t))) \neq \emptyset$. D'après la caractérisation 2.4(ii) des corps fertiles, T a un point k-rationnel, d'où le résultat. ∎

2.8.1 Remarque. En caractéristique nulle et pour G constant, 2.7 et 2.8 redonnent respectivement le théorème 2 et le théorème 1 de [CT].

2.9 Corollaire. *Sous les hypothèses de* 2.8, *soit de plus* (Γ, ε) *une* k*-courbe lisse pointée. Alors il existe un* (G, X)*-revêtement connexe de* (Γ, ε).

(C'est le théorème 1.1 de l'introduction).

Démonstration. Résulte de 2.8 et de la proposition 2.2.1. ∎

3 Recollement de schémas le long de sous-schémas fermés

3.1 Notations.

Considérons un schéma S et un diagramme $Y \xleftarrow{i} T \xrightarrow{j} Z$ de S-schémas. On cherche à « recoller Y et Z le long de T ». Nous supposerons ici que i et j sont des *immersions fermées*. (Les heureux possesseurs de [Fe] y verront étudié le cas où seule l'une de ces deux flèches est une immersion fermée, l'autre étant seulement supposée affine.)

Définissons $Y \amalg_{i,T,j} Z$ (en abrégé $Y \amalg_T Z$) comme le conoyau du diagramme $Y \xhookleftarrow{i} T \xhookrightarrow{j} Z$ dans la catégorie des espaces annelés (ou, ce qui revient au même, des S-espaces annelés). On obtient un diagramme de S-espaces annelés

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{j} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ Y & \xrightarrow{j'} & Y \amalg_T Z \end{array} \qquad (3.1.1)$$

qui est cocartésien par définition.

Convention : nous serons souvent amenés à considérer le cas où S, Y, Z et T sont affines : dans ce cas, nous désignerons sans commentaire par k, A, B et C leurs anneaux respectifs (de sorte que l'on a un diagramme $A \twoheadrightarrow C \twoheadleftarrow B$ de k-algèbres).

3.2 Proposition. *Les hypothèses et notations sont celles de* 3.1.

(i) *L'espace annelé $Y \amalg_T Z$ est un schéma, et i' et j' sont des immersions fermées ;*

(ii) *si Y, Z et T sont affines, alors $Y \amalg_T Z$ est affine d'anneau $A \times_C B$, avec les morphismes évidents ;*

(iii) *si U (resp. V) est un ouvert de Y (resp. de Z) et si $i^{-1}(U) = j^{-1}(V)$, alors $U \amalg_{i^{-1}(U)} V$ s'identifie par les flèches évidentes à un ouvert de $Y \amalg_T Z$;*

(iv) *le diagramme* (3.1.1) *de schémas est cartésien ;*

(v) *la formation de $Y \amalg_T Z$ commute à tout changement de base plat $S' \to S$, et à tout changement de base si T est plat sur S ;*

(vi) *si Y et Z sont quasi-compacts (resp. quasi-séparés, resp. séparés) sur S, il en est de même de $Y \amalg_T Z$;*

(vii) *si Y et Z sont localement de type fini (resp. propres) sur S, et si l'une des immersions i et j est de présentation finie, alors $Y \amalg_T Z$ est localement de type fini (resp. propre) sur S ;*

(viii) *si Y, Z et T sont localement de présentation finie sur S, et si T est plat sur S, alors $Y \amalg_T Z$ est localement de présentation finie sur S ;*

(ix) *si Y et Z sont des S-courbes nodales* (au sens de 2.1), *si T est étale sur S, et si i et j se factorisent par les ouverts de lissité respectifs de g et h, alors $Y \amalg_T Z$ est une S-courbe nodale; de plus* $\mathrm{Sing}\,(Y \amalg_T Z/S)$ *s'identifie à la somme disjointe* $T \amalg \mathrm{Sing}\,(Y/S) \amalg \mathrm{Sing}\,(Z/S)$.

Démonstration. Les assertions (i) à (iv) sont établies dans ([An], 1.1) ; le point essentiel, une fois traité le cas affine, est que l'on peut trouver des recouvrements ouverts affines arbitrairement fins $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de X et $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de Y tels que $i^{-1}(U_\lambda) = j^{-1}(V_\lambda)$ pour tout λ ; ci-dessous, deux tels recouvrements seront dits *compatibles*.

(v) : on se ramène au cas affine, et l'on remarque que l'on a une suite exacte naturelle de k-modules $0 \to A \times_C B \to A \times B \to C \to 0$.

(vi) : on se ramène au cas où S est affine ; il est alors clair par définition de $Y \amalg_T Z$ que la quasi-compacité est préservée. Par ailleurs si Y et Z sont quasi-séparés, soient $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ des recouvrements affines compatibles de X et de Y : alors pour λ et μ dans Λ, $U_\lambda \cap U_\mu$ est quasi-compact, de même que $V_\lambda \cap V_\mu$; par suite les $W_\lambda = U_\lambda \amalg_{i^{-1}(U_\lambda)} V_\lambda$ forment un recouvrement affine de $Y \amalg_T Z$ tel que $W_\lambda \cap W_\mu$ soit quasi-compact pour tous λ et μ. Donc $Y \amalg_T Z$ est bien quasi-séparé. Le cas « séparé » se traite de façon similaire.

(vii), « localement de type fini » : on peut supposer que S, Y, Z et T sont affines. Soit $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ (resp. $(b_\mu)_{\mu\in M}$) une famille de générateurs de la k-algèbre A (resp. B), et soit

$(\beta_\nu)_{\nu\in N}$ une famille de générateurs de l'idéal J noyau de la surjection $B \to C$ correspondant à j. Relevons chaque a_λ (resp. b_μ) dans $A \times_C B$ en $\tilde{a}_\lambda$ (resp. $\tilde{b}_\mu$) (noter que le morphisme canonique $A \times_C B \to A$ est surjectif, de noyau $\{0\} \times J$). Le lecteur vérifiera alors aisément que les $\tilde{a}_\lambda$, $\tilde{b}_\mu$ et $(0, \beta_\nu)$ engendrent $A \times_C B$ comme k-algèbre, ce qui entraîne l'assertion.

(vii), « propre » : il résulte de ce qui précède et de (vi) que $Y \amalg_T Z$ est de type fini et séparé sur S. Il est donc propre, comme image du S-schéma propre $Y \amalg Z$.

(viii) : lorsque S est localement noethérien, l'assertion résulte évidemment de (vii) (sans hypothèse de platitude pour T). Dans le cas général, on se ramène au cas affine, puis au cas noethérien en remarquant que le diagramme de k-algèbres de présentation finie $A \twoheadrightarrow C \twoheadleftarrow B$ provient par changement de base d'un diagramme analogue $A_0 \twoheadrightarrow C_0 \twoheadleftarrow B_0$ de k_0-algèbres de présentation finie, où k_0 est un sous-anneau de k qui est une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini ; de plus d'après ([Gro 2], 11.2.6.1), on peut supposer que la k_0-algèbre C_0 est plate, ce qui assure d'après (v) que $(A_0 \times_{C_0} B_0) \otimes_{k_0} k$ s'identifie à $A \times_C B$.

(ix) : d'après les assertions précédentes, $Y \amalg_T Z$ est plat et de présentation finie sur S. Comme sa formation commute au changement de base puisque T est plat, on est ramené au cas bien connu où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. ∎

3.3 Faisceaux sur une somme amalgamée.

Pour tout schéma X, notons $\mathrm{QC}(X)$ (resp. $\mathrm{LL}(X)$) la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents (resp. localement libres de rang fini). Avec les notations de 3.1, on a un foncteur évident

$$F : \mathrm{QC}(Y \amalg_T Z) \longrightarrow \mathrm{QC}(Y) \times_{\mathrm{QC}(T)} \mathrm{QC}(Z) \tag{3.3.1}$$

où l'on rappelle qu'un objet de la catégorie « produit fibré » de droite est de la forme $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \varphi)$ où $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) est un faisceau quasi-cohérent sur Y (resp. sur Z) et φ un isomorphisme (de $\mathcal{O}_T$-Modules) de $i^*\mathcal{F}$ sur $j^*\mathcal{G}$. Ce foncteur admet un adjoint à droite

$$G : \mathrm{QC}(Y) \times_{\mathrm{QC}(T)} \mathrm{QC}(Z) \longrightarrow \mathrm{QC}(Y \amalg_T Z) \tag{3.3.2}$$

qui envoie $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \varphi)$ sur le produit fibré évident $j'_*\mathcal{F} \times_{(j'_*\mathcal{F})_{|T}} i'_*\mathcal{G}$ où l'on identifie T à un sous-schéma de $Y \amalg_T Z$, et où les restrictions de $j'_*\mathcal{F}$ et $i'_*\mathcal{G}$ à ce sous-schéma sont identifiées entre elles grâce à φ.

Ces deux foncteurs respectent les faisceaux localement libres de rang fini. D'autre part, il est facile de voir que le morphisme d'adjonction $FG \to \mathrm{Id}$ est un isomorphisme. Ce n'est pas le cas en général du morphisme d'adjonction $\mathrm{Id} \to GF$; toutefois :

3.3.1 Proposition. *Avec les notations de* 3.3, *les foncteurs F et G induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre entre* $\mathrm{LL}(Y \amalg_T Z)$ *et* $\mathrm{LL}(Y) \times_{\mathrm{LL}(T)} \mathrm{LL}(Z)$.

Démonstration. On se ramène au cas affine, dû à Milnor, cf. ([Ba], IX, § 5). ∎

3.3.2 Remarque. On a un énoncé analogue, que nous n'utiliserons pas, en remplaçant les Modules localement libres de rang fini par les Modules plats ([Fe], (2.2), utilisant [Gru-R], deuxième partie, (1.2.4)).

3.4 Schémas sur une somme amalgamée

Ce qui a été dit en 3.3 pour les Modules s'étend immédiatement aux Algèbres ; en particulier, si, pour un schéma X, on note $\mathrm{FLL}(X)$ la catégorie des X-schémas finis localement libres, on obtient une équivalence de catégories (avec les notations de 3.1)

$$\mathrm{FLL}(Y) \times_{\mathrm{FLL}(T)} \mathrm{FLL}(Z) \longrightarrow \mathrm{FLL}(Y \amalg_T Z) \tag{3.4.1}$$

qui envoie, avec les notations évidentes, (Y', Z', φ) sur $Y' \amalg_{Y' \times_Y T} Z'$. De plus, si Y' et Z' sont étales sur Y et Z respectivement, alors $Y' \amalg_{Y' \times_Y T} Z'$ est étale sur $Y \amalg_T Z$. Combinant ces faits avec 3.2 (ix), on obtient :

3.5 Proposition. *Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes fini étale, et*

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xleftarrow{i'} & T' & \xrightarrow{j'} & Z' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ Y & \xleftarrow{i} & T & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

un diagramme de S-schémas, où :

- *les carrés sont cartésiens ;*
- *Y, Z, Y', Z' sont des S-courbes nodales ;*
- *T et T' sont étales et surjectifs sur S ;*
- *i, j, i' et j' sont des immersions fermées, à valeurs dans les ouverts de lissité respectifs de Y, Z, Y' et Z' ;*
- *Y', Z' et T' sont munis d'actions de G faisant de p et q des G-revêtements (cf. 2.2), et i' et j' sont G-équivariantes.*

Alors le morphisme naturel $Y' \amalg_{T'} Z' \longrightarrow Y \amalg_T Z$ est de façon naturelle un G-revêtement. ■

3.5.1 Remarque. Nous avons restreint, en 2.2, la définition d'un G-revêtement au cas où la courbe but est propre et connexe ; c'est pour garantir la connexité des fibres de $Y \amalg_T Z$ que l'on impose ci-dessus que T soit surjectif sur S.

3.5.2 Cas des courbes de genre 0. Sous les hypothèses de 3.5, il est immédiat que si Y et Z sont de genre 0, *et si* $T = S$ (de sorte que i et j sont des sections de Y et Z sur S), alors $Y \amalg_T Z$ est encore de genre 0.

Nous aurons besoin de la généralisation suivante : Y est de genre 0, T est fini étale sur S, Z est une T-courbe nodale de genre 0, et j est une section de Z sur T. Alors $Y \amalg_T Z$ (où Z est vue comme S-courbe) est encore de genre 0 sur S. Pour le voir il suffit de traiter le cas où S est spectre d'un corps k algébriquement clos, auquel cas Y est munie de d points lisses distincts y_i $(1 \leq i \leq d)$, et Z est une somme disjointe de k-courbes nodales Z_i $(1 \leq i \leq d)$ de genre 0, chacune munie d'un point lisse z_i. La courbe $Y \amalg_T Z$ s'obtient en attachant chaque Z_i à Y par identification de z_i à y_i.

3.5.3 Exemple. Cet exemple élémentaire sera utilisé plus loin. Prenons (Γ, ε) nodale pointée de genre 0 sur S, posons $\Gamma^+ = \Gamma \amalg_{\varepsilon,S,0} \mathbb{P}^1_S$, et notons ε^+ la section de Γ^+ déduite de la section ∞ de $\mathbb{P}^1_S$. Alors $(\Gamma^+, \varepsilon^+)$ est encore pointée de genre 0, et de plus elle admet une section disjointe de Γ et de ε^+, déduite de la section 1 de $\mathbb{P}^1_S$. Partant de $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ et $(\Gamma, \varepsilon) = (\mathbb{P}^1, \infty)$ et répétant ce processus, on obtient pour tout $r \in \mathbb{N}$ une « chaîne de droites projectives » qui est une $\mathbb{Z}$-courbe nodale de genre 0 ayant r sections disjointes contenues dans l'ouvert de lissité.

4 Construction de revêtements singuliers

Nous allons dans ce paragraphe démontrer le théorème 2.5 : on cherche donc à construire, sur un corps k donné, une courbe nodale Γ de genre 0, munie d'un point rationnel lisse ε, et un (G, X)-revêtement connexe de (Γ, ε), pour G et X donnés.

Nous allons y parvenir au moyen de constructions élémentaires, proches de celles utilisées notamment dans [Hb 1] et [Hb-S], et dont la plupart sont valables sur une base générale. Le principal outil est l'assemblage de revêtements étudié au §3, et le point de départ des assemblages est fourni par les lemmes élémentaires 4.1 et 4.2 qui suivent (où, pour tout entier n non nul, on note μ_n le schéma en groupes $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1))$ des racines n-ièmes de l'unité).

4.1 Lemme. *Soient S un schéma, n un entier inversible sur S. Alors $\mu_{n,S}$ est fortement réalisable.*

Démonstration. Considérer $\Gamma = \mathbb{P}^1_S$, pointée en 1, et le revêtement de Kummer $\mathbb{P}^1_S \to \Gamma$, donné sur la coordonnée affine par $x \mapsto x^n$. ∎

4.1.1 Remarque. Comme μ_n est commutatif, la remarque 2.3.3 s'applique : sous les hypothèses de 4.1, tout $\mu_{n,S}$-torseur est fortement réalisable. Même chose pour le lemme 4.2 ci-dessous.

4.1.2 Remarque. Soit S un schéma et soit G un S-schéma en groupes fini étale *commutatif*, dont l'ordre est inversible sur S. Alors on peut construire une suite exacte $1 \to G \to T \to T' \to 1$, où T et T' sont des tores sur S et où de plus T' est de la forme $\mathrm{R}_{S'/S}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S'}$ où S' est fini étale sur S (ici R désigne la restriction de Weil ; la construction est faite dans [S], 4.2.1 lorsque $S = \operatorname{Spec}(\mathbb{Q})$ et se généralise sans difficulté). En particulier, si S est le spectre d'un corps k, T' est une variété *k-rationnelle*, d'où l'on déduit comme dans *loc. cit.* que G (et donc aussi tout G-torseur) est fortement réalisable sur k.

Cependant, le cas de μ_n, particulièrement simple, nous suffira.

4.2 Lemme. *Soient p un nombre premier, S un $\mathbb{F}_p$-schéma, n un entier naturel. Alors le S-groupe constant $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S$ est fortement réalisable.*

Démonstration. Posons pour abréger $G = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_S$. On peut supposer que $S = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$. On sait qu'alors il existe un revêtement étale Y géométriquement connexe de groupe G de la droite affine $\mathbb{A}^1_S$, obtenu par exemple comme suit : on note W_n le schéma des vecteurs de Witt de longueur n sur S, φ l'isogénie $F - \mathrm{Id} : W_n \to W_n$ (F désignant l'endomorphisme de Frobenius), de noyau $W_n(S) = G$, et l'on prend $Y = \mathbb{A}^1_S \times_{f, W_n, \varphi} W_n$ où f est le morphisme $x \mapsto (x, 0, \dots, 0)$. On en déduit le revêtement voulu de $\mathbb{P}^1_S$ par complétion.

(Pour voir que Y est bien géométriquement connexe, on peut se placer sur $S = \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p$ et remarquer que s'il ne l'était pas, le revêtement $Y/pG \to \mathbb{A}^1$ serait trivial. Or ce dernier s'identifie au revêtement d'Artin-Schreier.) ∎

4.3 Remarque. Dans 4.1, le revêtement $C \to \mathbb{P}^1$ obtenu est totalement ramifié en 0 et ∞, et étale ailleurs ; de plus C est isomorphe à $\mathbb{P}^1$.

Dans 4.2, il est totalement ramifié en ∞, et étale ailleurs ; par contre C n'est pas de genre 0, sauf bien sûr lorsque $n = 0$ (on obtient le revêtement trivial $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1}$), et lorsque $n = 1$ où l'on obtient le revêtement d'Artin-Schreier.

4.4 Proposition. *Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes constant (identifié au groupe fini ordinaire correspondant). On suppose donnés de plus des sous-groupes $H_1, \dots, H_r$ ($r \in \mathbb{N}$) de G, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *la réunion des H_i engendre G ;*

(ii) *chaque H_i est réalisable.*

Alors G est réalisable.

Démonstration. (cf. [Hb-S], Section 4) D'après (ii), on a pour chaque i une S-courbe nodale pointée $(\Gamma_i, \varepsilon_i)$, de genre 0, un H_i-revêtement connexe $\pi_i : C_i \to \Gamma_i$, et une trivialisation α_i du H_i-torseur $C_i \times_{\pi_i, \Gamma_i, \varepsilon_i} S$. Posons $C'_i = C_i \times^{H_i} G$. Le morphisme canonique $\pi'_i : C'_i \to \Gamma_i$ est un (G, G)-revêtement de Γ_i. En général il n'est pas connexe ; en fait on a un ouvert fermé canonique C'^0_i de C'_i, à savoir $C'^0_i = C_i \times^{H_i} H_i$, qui s'identifie canoniquement à C_i et est donc une S-courbe nodale connexe.

La fibre de C'_i le long de ε_i est munie d'une trivialisation canonique

$$C'_i \times_{\pi'_i, \Gamma_i, \varepsilon_i} S \xrightarrow{\sim} G$$

par laquelle la fibre de C'^0_i s'identifie à H_i.

Prenons alors une S-courbe nodale Γ_0 de genre 0, munie de $r + 1$ sections disjointes $x_0, \dots, x_r$ (cf. 3.5.3), et notons $\pi'_0 : C'_0 = \Gamma_0 \times G \to \Gamma_0$ le G-revêtement trivial. En assemblant Γ_0 (resp. C'_0) à chaque Γ_i (resp. C'_i), pour $1 \le i \le r$, par identification de x_i à ε_i (resp. de la fibre en x_i de π'_0 à la fibre en ε_i de π'_i via leurs trivialisations) on obtient un (G, G)-revêtement $\pi : C \to \Gamma$, où Γ est pointée par le point restant x_0 de Γ_0. Il nous suffit de montrer que C est connexe. On peut pour cela supposer que S est le spectre d'un corps k algébriquement clos, en vertu de 3.2(v). Au-dessus de Γ_0 (identifiée à un fermé de Γ) on a une section canonique de π correspondant à l'élément neutre de G. Il résulte de notre construction que cette section rencontre chacune des composantes $C_i'^0$ $(1 \leq i \leq r)$ de C. Il s'ensuit immédiatement que le stabilisateur, dans G, de la composante connexe de C contenant ladite section contient tous les H_i, donc est égal à G. Donc C est bien connexe. ∎

4.4.1 Remarque. On peut étendre l'argument à des torseurs non nécessairement triviaux, sous des groupes G plus généraux : on se donne un S-groupe fini étale G, des sous-groupes (finis étales) H_i de G, engendrant G, et un K-torseur Y où K est l'intersection des H_i. En adaptant la preuve ci-dessus, on voit que si, pour chaque i, le H_i-torseur $Y \times^K H_i$ est réalisable, alors $Y \times^K G$ est réalisable.

Sur le chemin du théorème 2.5, nous pouvons déjà énoncer :

4.5 Proposition. *Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes fini étale, X un G-torseur. On suppose que $|G|$ (vu comme section « localement entière » de $\mathcal{O}_S$) est inversible sur S, ou que S est un schéma sur un corps. Alors il existe un S-schéma fini étale surjectif S' tel que X soit réalisable sur S'.*

Démonstration. On peut supposer S connexe. Dans ce cas il existe S' fini étale surjectif sur S avec les propriétés suivantes :

- $G_{S'}$ est constant ;
- $X_{S'}$ est trivial ;
- si $|G| = mp^r$ avec m inversible sur S et (le cas échéant) p premier nul sur S, alors $\mu_{m,S'}$ est constant.

Les lemmes 4.1 et 4.2 montrent que pour tout entier d divisant $|G|$, $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})_{S'}$ est réalisable. Il suffit d'appliquer 4.4 en prenant pour les H_i une famille de sous-groupes cycliques de $G_{S'}$ engendrant $G_{S'}$. ∎

4.6 Proposition. *Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes fini étale, X un G-torseur ; S' un S-schéma fini étale surjectif. On suppose que :*

(i) *le S-schéma somme $S' \amalg S$ est plongeable dans l'ouvert de lissité d'une S-courbe nodale de genre 0 ;*

(ii) *X est réalisable sur S'.*

Alors X est réalisable.

Démonstration. (Tous les produits sont fibrés sur S). D'après (i), il existe une S-courbe nodale pointée $(\Gamma_0, \varepsilon_0)$ de genre 0, et un S-plongement $i : S' \hookrightarrow \Gamma_0$ à valeurs dans l'ouvert de lissité et disjoint de ε_0. On considère sur $(\Gamma_0, \varepsilon_0)$ le (G, X)-revêtement (non connexe) trivial $\Gamma_0 \times X \to \Gamma_0$.

D'après (ii), il existe un $(G_{S'}, X_{S'})$-revêtement $\pi' : C' \to \Gamma'$, où Γ' est pointée par $\varepsilon' : S' \to \Gamma'$. On a en particulier un $G_{S'}$-plongement $j' : X_{S'} \hookrightarrow C'$.

Posons alors

$$\Gamma := \Gamma_0 \amalg_{i,S',\varepsilon'} \Gamma';$$

c'est une S-courbe nodale de genre 0 d'après 3.5.2, et elle est munie d'une section ε déduite de ε_0. Posons d'autre part

$$C := (\Gamma_0 \times X) \amalg_{i\times \mathrm{id}_X,\, S'\times X,\, j'} C'.$$

Il est alors immédiat que l'on a un (G,X)-revêtement $\pi : C \to \Gamma$, déduit des données initiales. Il reste à voir que C est connexe. Pour cela, on peut supposer que S est le spectre d'un corps k algébriquement clos. D'autre part, comme π est fini et plat et Γ connexe, il suffit de trouver un fermé non vide Z de Γ tel que $\pi^{-1}(Z)$ soit connexe. Or soit Γ_1 une composante connexe de Γ' (c'est-à-dire une fibre de Γ' en un point de S') : alors Γ_1 s'identifie à un fermé Z de Γ, et $\pi^{-1}(Z)$ est isomorphe à $\pi'^{-1}(\Gamma_1)$ donc est connexe puisque c'est une fibre de C' sur S'. ∎

En combinant 4.5 et 4.6, on obtient :

4.7 Théorème. *Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes fini étale, X un G-torseur. On suppose que $|G|$ est inversible sur S, ou que S est un schéma sur un corps. De plus, on suppose vérifiée la condition suivante :*

($*$) *tout S-schéma fini étale est plongeable dans l'ouvert de lissité d'une S-courbe nodale de genre* 0.

Alors X est réalisable. ∎

4.8 Preuve du théorème 2.5.

Posant $S = \mathrm{Spec}\,(k)$, il suffit de voir que la condition ($*$) de 4.7 est vérifiée. Or un S-schéma fini étale S' est somme de spectres S_i ($1 \leq i \leq r$) d'extensions finies séparables de k. D'après le théorème de l'élément primitif, chaque S_i est plongeable dans $\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$. Par suite S' est plongeable dans une « chaîne de droites » du type 3.5.3, d'où la conclusion. ∎

4.9 Remarques.

4.9.1 J'ignore si la condition ($*$) de 4.7 est toujours vérifiée. On a vu en 4.8 qu'elle l'est si S est le spectre d'un corps, et il est facile d'en déduire qu'elle l'est encore si S est local hensélien. D'autre part, elle l'est aussi si S est local à corps résiduel infini : dans ce cas, tout S-schéma fini étale est plongeable dans $\mathbb{P}^1_S$.

4.9.2 En cas de besoin le lecteur pourra facilement raffiner certains énoncés de ce paragraphe.

Par exemple, la condition « $|G|$ est inversible sur S, ou S est un schéma sur un corps » apparaissant dans 4.5 et dans 4.7, peut être remplacée par « il existe un S-schéma en groupes localement isomorphe à $\mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$ et réalisable sur S ».

De même, l'examen des arguments de 4.5 et 4.6 montre que l'on peut limiter la condition $(*)$ de 4.7 aux S-schémas finis étales de degré borné par un entier d ne dépendant que de G, par exemple $d = 1 + |G|\,\phi(|G|)\,|\mathrm{Aut}\,(G)|$, où ϕ est l'indicateur d'Euler.

5 Déformation

Nous allons, dans ce paragraphe, démontrer le théorème 2.6.

5.1 Notations.

On se donne donc un corps k, un k-schéma en groupes fini étale G, un G-torseur X et un (G, X)-revêtement

$$C_0 \xrightarrow{\pi_0} \Gamma_0 \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(k)$$

de k-courbes nodales, où Γ_0 est de genre 0, pointée par $\varepsilon_0 \in \Gamma_0(k)$. On cherche à relever ces données en $\pi : C \longrightarrow \Gamma \longrightarrow S$, où $S = \mathrm{Spec}\,k[[t]]$, et où Γ et C sont lisses au-dessus du point générique U de S.

Observons d'abord que nous pouvons oublier ε_0 et X : en effet, comme la section ε_0 est dans $\mathrm{Reg}(\Gamma_0/k)$, elle se relève automatiquement dans $\mathrm{Reg}(\Gamma/S)$ puisque $k[[t]]$ est hensélien, et pour la même raison un G-torseur sur S (donc aussi sur l'image de ε) est déterminé à isomorphisme unique près par sa fibre spéciale.

On sait déjà qu'il existe une S-courbe de genre 0 relevant Γ_0 et lisse sur U (plus précisément, d'après [De-Mu], (1.5), toute déformation des points singuliers provient d'une déformation de Γ_0, et d'autre part les points singuliers admettent des déformations lisses). On fixe une fois pour toutes une telle courbe, notée Γ.

Notons $\Sigma_0 \subset \Gamma_0$ le lieu de ramification de π_0. C'est un ensemble fini de points fermés de $\mathrm{Reg}\,\Gamma_0$.

Pour tout point fermé y de Γ_0, nous noterons $R_{0,y}$ l'anneau semi-local complété de C_0 en $\pi_0^{-1}(y)$: il s'identifie au produit des anneaux locaux complétés $\widehat{\mathcal{O}}_{C_0,z}$ pour $z \in \pi_0^{-1}(y)$, et l'on a un morphisme fini localement libre :

$$\pi_{0,y} : \mathrm{Spec}\,R_{0,y} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\widehat{\mathcal{O}}_{\Gamma_0,y} \tag{5.1.1}$$

(où $\widehat{\mathcal{O}}_{\Gamma_0,y}$ désigne évidemment le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{\Gamma_0,y}$) qui est un « revêtement de groupe G » au sens suivant : on a une action naturelle de G sur $\mathrm{Spec}\,R_{0,y}$ qui fait de $\pi_{0,y}$ un G-torseur en-dehors de y (et même un G-torseur si $y \notin \Sigma_0$). De plus si $y \notin \mathrm{Sing}\,\Gamma_0$ (et notamment si $y \in \Sigma_0$) les anneaux $\widehat{\mathcal{O}}_{\Gamma_0,y}$ et $R_{0,y}$ sont réguliers.

5.2 Déformation aux points de ramification.

Soit $y \in \Sigma_0$. Comme Γ est lisse sur S en y, il existe un $k[[t]]$-isomorphisme

$$\varphi_y : \widehat{\mathcal{O}}_{\Gamma,y} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{\Gamma_0,y}[[t]].$$

On fixe une fois pour toutes un tel isomorphisme, pour chaque y.

Considérons alors le revêtement $\pi_{0,y}$ de (5.1.1), et prenons les séries formelles en t des deux côtés : posant $R_y := R_{0,y}[[t]]$, et utilisant l'isomorphisme φ_y choisi, on en déduit un revêtement ramifié

$$\pi_y^{\mathrm{ram}} : \operatorname{Spec} R_y \longrightarrow \operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}}_{\Gamma,y}$$

qui prolonge $\pi_{0,y}$.

5.3 Déformation aux points singuliers.

Pour chaque point $y \in \operatorname{Sing}\Gamma_0$, puisque π_0 est étale en y, il existe un unique G-torseur

$$\pi_y^{\mathrm{sing}} : \operatorname{Spec} R_y \longrightarrow \operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}}_{\Gamma,y}$$

qui prolonge $\pi_{0,y}$.

5.4 Recollement.

Nous sommes maintenant dans la situation de ([Hb-S], Theorem 2) et pouvons donc en conclure qu'il existe un G_S-revêtement

$$C \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow S = \operatorname{Spec} k[[t]]$$

induisant (à isomorphisme près) π_0 au-dessus de Γ_0, et π_y^{ram} (resp. π_y^{sing}) sur $\operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}}_{\Gamma,y}$, pour $y \in \Sigma_0$ (resp. pour $y \in \operatorname{Sing}\Gamma_0$, ceci étant d'ailleurs automatique).

Noter que C_U est bien lisse sur U : en effet soit A un point fermé de C_U, et soit $a \in C_0$ son unique spécialisation : si $\pi(a) \notin \Sigma_0$, alors π_0 est étale en a, et donc π est étale en A et C est lisse en A puisque Γ_U est lisse ; si $\pi(a) \in \Sigma_0$, alors C_0 est lisse en a, donc C est lisse en A.

Enfin C_U est géométriquement intègre puisque C_0 l'est et que C est propre et plat sur S ([Gro 2], (12.2.4)(vi)). ■

6 Variantes et compléments

Dans toute la suite k désigne un corps ; on note k_{s} une clôture séparable de k, p sa caractéristique. Par ailleurs, S désigne un schéma, G un S-schéma en groupes fini étale, X un G-torseur.

6.1 Raccourci.

Le lecteur qui ne s'intéresse qu'au théorème 1.1 peut abréger la lecture du §4 : lorsque S est le spectre d'un corps k, la proposition 4.5 n'est autre — avec les mêmes méthodes — que le théorème de Harbater [Hb 1] déjà cité (existence d'un revêtement de groupe donné de $\mathbb{P}^1_K$, pour K séparablement clos) ; il suffit donc d'invoquer [Hb 1] et de démontrer l'énoncé de « descente » 4.6 pour obtenir le théorème 2.5 (existence d'un revêtement singulier sur le corps de base).

6.2 Compléments sur la ramification.

On suppose ici que $S = \mathrm{Spec}\,(k)$ et que k est fertile. On laisse alors au lecteur le soin de vérifier, en suivant les démonstrations, que l'on peut imposer au G-revêtement $\pi : C \to \mathbb{P}^1_k$ du théorème 2.8 les propriétés de ramification suivantes. Supposons que le groupe fini $G(k_{\mathrm{s}})$ soit engendré par des sous-groupes cycliques $H_1, \dots, H_r$ d'ordres respectifs $e_1, \dots, e_r$, de telle sorte que $e_1, \dots, e_a$ (resp. $e_{a+1}, \dots, e_r$) ne soient pas divisibles par p (resp. soient des puissances de p). Alors :

- les corps résiduels des points de ramification de π dans C sont séparables sur k ;
- les groupes d'inertie du revêtement π_{s} obtenu par extension des scalaires à k_{s} sont les transformés, par l'action du groupe de Galois de k_{s} sur k, des conjugués des H_i dans $G(k_{\mathrm{s}})$;
- si G est constant (*i.e.* est un groupe fini ordinaire) et si k contient, pour chaque $i \in \{1, \dots, a\}$, les racines e_i-ièmes de l'unité, alors les points de ramification de π dans C sont rationnels sur k et leurs images dans $\mathbb{P}^1_k$ peuvent être baptisées x_i, x'_i, y_j $(1 \leq i \leq a; a+1 \leq j \leq r)$, de sorte que pour $i \leq a$ (resp. pour $i > a$) les groupes d'inertie au-dessus de x_i et x'_i (resp. de y_i) soient les conjugués de H_i.

6.2.1 Remarque. On s'est limité dans ce travail aux revêtements de courbes nodales qui sont étales au voisinage du lieu singulier ; dans [Hb-S] (Theorem 7 notamment) on utilise des revêtements un peu plus généraux, ce qui permet d'assembler des revêtements en leurs points de ramification et ainsi de faire des économies sur le nombre de ces points. J'ignore si cette technique est compatible avec la contrainte d'obtenir un (G, X)-revêtement.

6.3 Le champ des courbes nodales (propres).

Dans tout ce qui suit, pour pouvoir commodément utiliser le langage des champs algébriques, nous sommes amenés à redéfinir la notion de courbe nodale (nous n'en aurons besoin que dans le cas propre et le plus souvent connexe, et lorsque la base est un schéma) : une S-courbe nodale sera désormais un *S-espace algébrique* ([Kn] ; [L-MB], (1.1)) plat, de présentation finie, et localement projectif sur S pour la topologie étale, dont les fibres géométriques sont des courbes nodales au sens de 2.1.

6.3.1 Remarque. On pourrait remplacer « localement projectif » par « propre » : les deux définitions sont en effet équivalentes et plus précisément, par le même argument qu'en 2.1.1, « propre » équivaut à « projectif » (compte tenu des autres hypothèses) si la base est locale hensélienne. Cependant, les références manquent pour la cohomologie des faisceaux cohérents sur les espaces algébriques (notamment les théorèmes de semi-continuité et de changement de base, qui conduisent à un critère d'amplitude par fibres). On a donc préféré inclure la projectivité locale dans la définition ; ceci permet souvent, comme le lecteur le vérifiera, de remédier aux lacunes de la littérature en se ramenant au cas des schémas par localisation étale sur la base, ou par hensélisation de celle-ci.

Pour tout schéma T, notons $\mathsf{NOD}(T)$ la catégorie des T-courbes nodales, au sens ci-dessus, avec comme morphismes les T-isomorphismes. Avec les foncteurs de changement de base évidents, NOD est un champ de groupoïdes sur Spec $(\mathbb{Z})$, pour la topologie étale ([L-MB], (3.1)) : c'est pour bénéficier de l'effectivité de la descente étale que nous avons dû revenir sur la définition. De plus (cf. plus loin, 7.1) NOD est un *champ algébrique lisse* sur Spec $(\mathbb{Z})$.

On notera $\mathsf{NOD}^0(T)$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{NOD}(T)$ formée des T-courbes lisses ; il est clair — indépendamment du fait que NOD est algébrique — que NOD^0 est un *sous-champ ouvert* (et de plus dense, cf. 7.1) de NOD.

On en déduit facilement (voir 7.2.2 pour les détails) que si, pour un S-schéma T, on note $\mathsf{REV}(G,X)(T)$ la catégorie des (G,X)-revêtements de T-courbes nodales pointées de genre 0, on obtient un S-champ $\mathsf{REV}(G,X)$ qui est algébrique et localement de présentation finie sur S. De plus les revêtements lisses forment un sous-champ ouvert REV^0 de REV.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant :

6.3.2 Lemme. *Soit $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ un morphisme* lisse *de champs algébriques. Alors f est* ouvert *pour la topologie de Zariski.*

En particulier, si V est un sous-champ ouvert dense de Y, alors $f^{-1}(\mathsf{V})$ est dense dans X.

Démonstration. Voir [L-MB], (5.6). ∎

6.4 Champs algébriques sur un corps fertile.

Le lemme suivant montre que les propriétés définissant les corps fertiles s'étendent aux champs algébriques :

6.4.1 Lemme. *Soient K un corps fertile et X un K-champ algébrique localement de type fini.*

(i) *Si X est lisse et connexe, alors $\mathsf{X}(K)$ est vide ou dense dans X ;*

(ii) *si $\mathsf{X}(K((t))) \neq \emptyset$, alors $\mathsf{X}(K) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Le point clé est le fait suivant ([L-MB], 6.3) : si X est un champ algébrique et L un corps, tout morphisme x : Spec $(L) \to \mathsf{X}$ (*i.e.* tout objet de $\mathsf{X}(L)$) se factorise en Spec $(L) \xrightarrow{z} Z \xrightarrow{q} \mathsf{X}$, où Z est un schéma (affine si l'on veut) et q un morphisme *lisse*.

Montrons comment en déduire (i) (pour (ii), l'argument est similaire). Si $\mathsf{X}(K) \neq \emptyset$ on applique la propriété précédente avec $L = K$: on en déduit un morphisme lisse $q : Z \to \mathsf{X}$, où Z est un schéma (qui est donc lisse sur K, et que l'on peut supposer connexe) ayant un point K-rationnel. Comme K est fertile, $Z(K)$ est dense dans Z. Mais comme q est ouvert (6.3.2) et X irréductible il en résulte que $q(Z(K))$, et *a fortiori* $\mathsf{X}(K)$, est dense dans X. ∎

6.5 Le cas modéré.

Désignons par $\mathsf{MOD}(G,X)$ le sous-champ de $\mathsf{REV}(G,X)$ paramétrant les revêtements *modérément ramifiés* et par $\mathsf{MOD}^0(G,X)$ son sous-champ ouvert formé des revêtements modérément ramifiés de courbes lisses.

Nous établirons en 7.2.6 les faits suivants (d'ailleurs bien connus des spécialistes) :

– $\mathsf{MOD}(G,X)$ est lisse sur S ;

– $\mathsf{MOD}^0(G,X)$ est dense dans $\mathsf{MOD}(G,X)$.

Supposons maintenant que $S = \operatorname{Spec}(k)$, et que le groupe fini $G(k_{\mathrm{s}})$ soit *engendré par ses éléments d'ordre non divisible par p*. (Noter que sans cette dernière hypothèse, $\mathsf{MOD}(G,X)$ serait vide).

On va alors déduire des faits ci-dessus une preuve plus conceptuelle du théorème 2.8, évitant les constructions générales du §5.

6.5.1 En effet, les constructions du §4 (appliquées en utilisant une famille de générateurs de $G(k_{\mathrm{s}})$ d'ordre non divisible par p) fournissent un objet $\pi : C \to \Gamma$ de $\mathsf{MOD}(G,X)(k)$. Si de plus k est fertile, comme $\mathsf{MOD}(G,X)$ est lisse et l'ouvert $\mathsf{MOD}^0(G,X)$ dense, on déduit aisément de 6.4.1(i) (appliqué à la composante connexe de $\mathsf{MOD}(G,X)$ contenant π) que $\mathsf{MOD}^0(G,X)(k) \neq \emptyset$, ce qui n'est autre que 2.8.

6.5.2 Sans supposer k fertile, voici une variante de l'argument précédent, qui donne cette fois le théorème 2.7, en supposant de plus que le (G,X)-revêtement π de l'énoncé est modéré (l'existence d'un tel revêtement a été vue ci-dessus).

Le k-champ $\mathsf{MOD}(G,X)$ est muni d'un point rationnel $x : \operatorname{Spec}(k) \to \mathsf{MOD}(G,X)$, correspondant à π. Appliquant ([L-MB], 6.3) déjà cité, on en déduit un k-schéma Z, un k-morphisme lisse $q : Z \to \mathsf{MOD}(G,X)$ et un point $y \in Z(k)$ tel que $q(y) = x$. En particulier Z est lisse sur k (puisque $\mathsf{MOD}(G,X)$ l'est) et $q^{-1}(\mathsf{MOD}^0(G,X))$ est un ouvert dense de Z. Il existe donc une courbe affine lisse $Y \subset Z$ passant par y et telle que $q\,(Y \setminus \{y\}) \subset \mathsf{MOD}^0(G,X)$. Le morphisme $q_{|Y} : Y \to \mathsf{MOD}(G,X)$ s'interprète alors comme un (G_Y, X_Y)-revêtement qui a les propriétés voulues.

6.5.3 Enfin, on peut remarquer que le revêtement singulier $C \to \Gamma$ construit au §4 peut être choisi de telle sorte que les composantes irréductibles géométriques de C soient toutes des droites projectives. En particulier, on obtient dans 2.6 une courbe C sur $\operatorname{Spec}(k[[t]])$ qui donne par extension à $\operatorname{Spec}(k_{\mathrm{s}}[[t]])$ une *courbe de Mumford* [Mu]. Ceci est d'ailleurs valable, plus généralement (remarque 4.3), si $G(k_{\mathrm{s}})$ est engendré par ses éléments d'ordre non divisible par p^2.

6.6 Retour au cas général.

Les considérations de 6.5, jointes à la lecture de [CT], sont à l'origine du présent travail. C'est pour éliminer l'hypothèse « modérée » que l'auteur a dû se battre, à regret, avec les problèmes de déformation du §5. En un sens, on peut dire que les techniques de « formal patching » dues à Harbater ([Hb 3], [Hb-S]) servent à pallier le défaut de lissité des champs de revêtements étudiés. (Dans [P 2], ce rôle est joué par le « demi-théorème de Riemann » de [P 1]). De fait, le théorème de déformation 2.6 peut se reformuler comme une propriété géométrique du champ $\mathsf{REV}(G, X)$ de 7.2 (trivialement vérifiée pour les champs lisses) :

6.6.1 Proposition. *Soient k un corps, G un k-schéma en groupes fini étale, et X un G-torseur. Tout morphisme de* $\mathrm{Spec}\,(k)$ *dans* $\mathsf{REV}(G, X)$ *se prolonge en un morphisme de* $\mathrm{Spec}\,(k[[t]])$ *dans* $\mathsf{REV}(G, X)$ *dont la restriction à* $\mathrm{Spec}\,k\,((t))$ *est à valeurs dans l'ouvert* $\mathsf{REV}^0(G, X)$. ■

6.6.2 La version ci-dessus de 2.6 permet, de façon tout à fait formelle, de retrouver le théorème 2.8 : si k est fertile, comme $\mathsf{REV}^0(G, X)$ a un point à valeurs dans $k\,((t))$, il a un point à valeurs dans k d'après 6.4.1(ii). Bien entendu ce n'est là qu'un avatar de la variante de la preuve donnée en 2.8.

7 Champs de courbes et de revêtements

« Faute de référence commode », nous démontrons ici l'algébricité des champs de courbes et de revêtements considérés au §6 (7.1 et 7.2.2), ainsi que la lissité du champ des revêtements modérés (7.2.6).

7.1 Théorème. *Le champ* NOD *des courbes nodales propres (au sens de* 6.3*) est un champ algébrique (au sens d'Artin* [Ar 3], *ou de* [L-MB], (4.1)*) lisse sur* $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$.

Le sous-champ ouvert NOD^0 *de* NOD *formé des courbes lisses est dense dans chaque fibre de* NOD *au-dessus de* $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$.

Démonstration. La densité de NOD^0 vient du fait, déjà utilisé au §5 pour le genre 0, que toute courbe nodale sur un corps k se relève en une courbe nodale sur $k[[t]]$, lisse sur $k\,((t))$. Il reste à voir que NOD est algébrique et lisse sur $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$.

7.1.1 *Représentabilité relative.* Il s'agit d'abord de voir ([L-MB], condition (i) de la définition (4.1)) que si X et Y sont deux courbes nodales sur un schéma T, le faisceau des T-isomorphismes de X sur Y est un T-espace algébrique quasi-compact et séparé sur T. Cette question est locale sur T (au sens étale) de sorte que l'on peut supposer que X et Y sont projectives sur T, et la conclusion résulte alors de la théorie du schéma de Hilbert (voir [Gro 1], 4c).

7.1.2 *Lissité.* Supposant NOD algébrique, montrons qu'il est alors lisse sur $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$.

Pour voir qu'il est localement de présentation finie, il s'agit d'après [L-MB], (4.15) (appliqué avec $\mathcal{Y} = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$) de voir que si $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ est un système inductif filtrant d'anneaux, de limite inductive A, la catégorie $\mathsf{NOD}(\mathrm{Spec}\,A)$ est limite inductive des catégories $\mathsf{NOD}(\mathrm{Spec}\,A_\lambda)$. Or l'énoncé analogue est vrai pour les catégories d'espaces algébriques de présentation finie sur $\mathrm{Spec}\,A$ et les $\mathrm{Spec}\,A_\lambda$: c'est un cas particulier de ([L-MB], (4.18.1)). Il reste au lecteur à vérifier que si $\lambda_0 \in L$ et si X_0 est un A_{λ_0}-espace algébrique de présentation finie tel que $X_0 \otimes_{A_{\lambda_0}} A$ est une A-courbe nodale, alors il existe $\lambda \geq \lambda_0$ dans L tel que $X_0 \otimes_{A_{\lambda_0}} A_\lambda$ soit une A_λ-courbe nodale.

Pour conclure que NOD est lisse sur Spec $(\mathbb{Z})$, on applique le critère (4.15)(ii) de [L-MB] : si A est un anneau local hensélien, I un idéal de carré nul de A et X_0 une (A/I)-courbe nodale, il suffit de voir que X_0 se relève en une A-courbe nodale. C'est un résultat classique de théorie des déformations : comme X_0 est localement d'intersection complète relative sur $S_0 :=$ Spec (A/I), l'obstruction à l'existence d'un relèvement vit dans $\mathrm{Ext}^2(\Omega_{X_0/S_0}, I)$ qui est nul par les arguments de ([De-Mu], (1.3)), déjà utilisé au §5.

7.1.3 *Où l'on borne le genre et le nombre de composantes.* Pour chaque couple $(g, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, notons $\mathsf{NOD}(g, r)$ le sous-champ de NOD correspondant aux courbes $f : C \to S$ dont toutes les fibres géométriques

- ont au plus r composantes irréductibles ;
- ont toutes leurs composantes connexes de genre $\leq g$.

Alors chaque $\mathsf{NOD}(g, r)$ est un *sous-champ ouvert* ([L-MB], (3.14)) de NOD : ceci résulte du fait que, pour f comme ci-dessus, les conditions précédentes sur les fibres sont ouvertes sur S.

Comme manifestement les $\mathsf{NOD}(g, r)$ recouvrent NOD, il suffit donc de voir que chaque $\mathsf{NOD}(g, r)$ est algébrique. Fixons donc une fois pour toutes g et r et posons $\mathsf{X}_0 = \mathsf{NOD}(g, r)$. (Nous allons voir que, de plus, X_0 est *de type fini* sur Spec $(\mathbb{Z})$).

7.1.4 *Où l'on pointe les courbes.* Si T est un schéma et $f : \Gamma \to T$ un objet de $\mathsf{X}_0(T)$, appelons *marquage* de Γ la donnée de r sections E_i $(1 \leq i \leq r)$ de f, contenues dans $\mathrm{Reg}(f)$ et telle que chaque composante irréductible de chaque fibre de f rencontre l'une des E_i. Le foncteur associant à tout T-schéma T' l'ensemble des marquages de $\Gamma \times_T T'$ est représentable par un ouvert du produit fibré r-uple $\mathrm{Reg}(f) \times_T \ldots \times_T \mathrm{Reg}(f)$, et de plus cet ouvert est surjectif sur T vu la définition du champ X_0 (les marquages existent localement).

En conséquence, si l'on désigne par X_1 le champ paramétrant les objets « marqués » de X_0, alors le morphisme évident $\mathsf{X}_1 \to \mathsf{X}_0$ (oubli du marquage) est représentable, surjectif et lisse ([L-MB], définitions (3.9) et (3.10.1)). Il suffit donc de montrer que X_1 est algébrique.

7.1.5 *Plongements projectifs et conclusion.* Il existe un entier N, ne dépendant que de g et r, ayant les propriétés suivantes : pour tout schéma T et tout objet $(f : \Gamma \to T, E_1, \ldots, E_r)$ de $\mathsf{X}_1(T)$, si l'on note L le faisceau inversible $\mathcal{O}_\Gamma(E_1 + \ldots + E_r)$, alors $L^{\otimes N}$ est très ample relativement à f, et $\mathrm{R}^1 f_*(L^{\otimes N}) = 0$. Ces conditions impliquent que $f_*(L^{\otimes N})$ est localement libre sur T et que sa formation commute à tout changement de base.

De plus, le polynôme de Hilbert de L (vu comme fonction localement constante sur T, à valeurs dans $\mathbb{Q}[X]$) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, ne dépendant que de g et r. Fixant l'un de ces polynômes, noté Φ, on peut remplacer X_1 par son sous-champ (ouvert et fermé) X_2 correspondant aux courbes marquées telles que le polynôme de Hilbert de L soit Φ. Reprenant $(f : \Gamma \to T, E_1, \ldots, E_r)$, supposé dans $\mathsf{X}_2(T)$, on voit en particulier que le rang de $f_*(L^{\otimes N})$ est constant, égal à $\Phi(N)$. Les bases de $\mathbb{P}(f_*(L^{\otimes N}))$ (c'est-à-dire les isomorphismes de ce fibré projectif avec $\mathbb{P}_T^{\Phi(N)-1}$) sont paramétrées par un $\mathrm{PGL}_{\Phi(N),T}$-torseur. Par suite, si l'on note X_3 le champ des objets de X_2 munis d'une telle base, le morphisme naturel $\mathsf{X}_3 \to \mathsf{X}_2$ est représentable, lisse et surjectif ; il suffit donc de voir que X_3 est algébrique. Or un objet de $\mathsf{X}_3(T)$ équivaut à la donnée d'une T-courbe nodale $\Gamma \subset \mathbb{P}^{\Phi(N)-1}$, de polynôme de Hilbert Φ, munie d'un marquage $(E_1, \ldots, E_r)$ et d'un isomorphisme de faisceaux inversibles $\mathcal{O}_\Gamma(N(E_1 + \ldots + E_r)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\Gamma(1)$. La théorie du schéma de Hilbert ([Gro 1], théorème 3.2) implique alors facilement que X_3 est représentable par un schéma quasi-projectif sur $\mathbb{Z}$. ∎

7.1.6 Remarque. Les courbes *connexes* forment un sous-champ ouvert et fermé $\mathsf{NOD}^{\mathrm{c}}$ de NOD : ceci résulte du fait que le nombre géométrique de composantes connexes des fibres d'une courbe nodale est localement constant sur la base.

De même, pour chaque $g \in \mathbb{N}$, les courbes nodales (connexes) de genre g forment un sous-champ ouvert et fermé NOD_g de $\mathsf{NOD}^{\mathrm{c}}$, et $\mathsf{NOD}^{\mathrm{c}}$ est somme disjointe des NOD_g pour $g \in \mathbb{N}$ (pour une courbe nodale connexe, le genre des fibres est localement constant sur la base). Le résultat principal de [De-Mu] implique, compte tenu du résultat de densité ci-dessus, que chaque NOD_g est à fibres géométriquement irréductibles sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$; nous n'aurons pas à utiliser ce fait.

7.1.7 Remarque. $\mathsf{NOD}^{\mathrm{c}}$ (et, a fortiori, NOD) n'est pas un champ de Deligne-Mumford ([L-MB], 4.1 ; autrement dit il n'est pas algébrique au sens de [De-Mu]), et de plus il n'est pas séparé : par exemple, si S est un schéma non vide, le faisceau des S-automorphismes de l'objet $\mathbb{P}^1_S$ de $\mathsf{NOD}^{\mathrm{c}}(S)$ est représentable par le S-schéma en groupes $\mathrm{PGL}_{2,S}$ qui n'est ni non ramifié, ni propre sur S.

Cependant, $\mathsf{NOD}^{\mathrm{c}}$ admet un sous-champ ouvert paramétrant les courbes dont le groupe d'automorphismes est fini : cet ouvert n'est autre que le champ des *courbes stables* introduit dans [De-Mu], où il est prouvé que c'est un champ de Deligne-Mumford séparé, et même une somme de champs propres sur $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Il est dense dans le champ des courbes nodales de genre ≥ 2.

7.1.8 Remarque. Il résulte de 7.1 que le champ des courbes nodales *pointées* est encore algébrique et lisse sur $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$: c'est l'ouvert de lissité de la courbe universelle sur $\mathsf{NOD}^{\mathrm{c}}$. Nous aurons notamment à considérer son sous-champ ouvert et fermé formé des courbes nodales *pointées de genre* 0, que nous noterons M, et son sous-champ ouvert M^0 formé des courbes pointées *lisses*. Ce dernier est dense dans M d'après 6.3.2 puisque le morphisme canonique $\mathsf{M} \to \mathsf{NOD}$ est lisse et que NOD^0 est dense dans NOD ; d'autre part M^0 est isomorphe au champ des torseurs sous le groupe des automorphismes affines de $\mathbb{A}^1$.

7.2 Champs de revêtements.

7.2.1 Notations. S désigne un schéma quelconque. Pour tout S-schéma T nous noterons $\mathsf{REV}(G,X)(T)$ la catégorie des (G_T, X_T)-revêtements $(C \xrightarrow{\pi} \Gamma \to T, \rho, \varepsilon, \alpha)$ de courbes nodales, avec (Γ, ε) pointée de genre 0 : on a noté ρ l'action de G_T sur C, ε le point base de Γ_T et α l'isomorphisme de X_T avec $\pi^{-1}(\varepsilon)$, comme en 2.2. On obtient ainsi un S-champ de groupoïdes $\mathsf{REV}(G,X)$.

En se restreignant aux objets pour lesquels C et Γ sont lisses , on obtient un sous-champ ouvert $\mathsf{REV}^0(G,X)$ de $\mathsf{REV}(G,X)$.

7.2.2 Proposition. *Avec les hypothèses et notations de* 7.2.1, $\mathsf{REV}(G,X)$ *est un* S*-champ algébrique localement de présentation finie.*

Démonstration. Il suffit de voir, compte tenu de 7.1, que le morphisme de $\mathsf{REV}(G,X)$ dans $\mathsf{NOD}_S \times \mathsf{M}_S$ associant à $(C \xrightarrow{\pi} \Gamma \to T, \rho, \varepsilon, \alpha)$ le couple $(C, (\Gamma, \varepsilon))$ est représentable, au sens de ([L-MB], (3.9)), et localement de présentation finie. Si l'on se donne C et (Γ, ε) (sur un S-schéma que l'on peut supposer égal à S), il suffit pour cela de remarquer que :

– le faisceau des S-morphismes de C vers Γ est un S-espace algébrique localement de présentation finie : comme la question est locale sur S au sens étale, on peut supposer C et Γ projectives et appliquer ([Gro 1], 4c) (on peut aussi remarquer que la théorie du schéma de Hilbert s'étend aux espaces algébriques, d'après ([Ar 2], 6.1)) ;

– si de plus $\pi : C \to \Gamma$ est un S-morphisme, la condition « π est fini localement libre de rang $|G|$, et étale sur un ouvert de C dense dans chaque fibre et contenant $\mathrm{Sing}(C/S)$ » est ouverte sur S ;

– si π vérifie la condition qui précède, le faisceau des S-morphismes de G dans $\mathrm{Aut}(\pi)$ qui font de π un G-revêtement est un S-schéma fini et de présentation finie ;

– enfin, une fois donnée une action ρ de G sur C comme ci-dessus, le faisceau des G-isomorphismes de X avec $\pi^{-1}(\varepsilon)$ est, lui aussi, un S-schéma fini et de présentation finie. ∎

7.2.3 Le cas modéré. Rappelons (6.5) que l'on note $\mathsf{MOD}(G,X)$ le sous-champ de $\mathsf{REV}(G,X)$ formé des revêtements *modérément ramifiés.*

Précisons d'abord cette définition. Si T est un S-schéma, et si $(C \xrightarrow{\pi} \Gamma \to T, \rho, \varepsilon, \alpha)$ est un objet de $\mathsf{REV}(G,X)(T)$, notons $\mathrm{I}(G,C) \to C$ le schéma en groupes d'inertie de π : c'est un sous-C-schéma en groupes fermé de $G \times_S C$ (paramétrant les couples (g,x) tels que $gx = x$), et donc un C-schéma en groupes fini non ramifié.

Dire que π est modérément ramifié (ou simplement « modéré ») signifie par définition que, pour chaque point géométrique ξ de C, la fibre $\mathrm{I}(\xi)$ de $\mathrm{I}(G,C) \to C$ en ξ est un groupe d'ordre inversible dans $\kappa(\xi)$.

On voit facilement que $\mathsf{MOD}(G,X)$ est un sous-champ ouvert de $\mathsf{REV}(G,X)$.

Soient π et ξ comme ci-dessus, et supposons π modéré. Le groupe $\mathrm{I}(\xi)$ est alors automatiquement cyclique, et son action sur un voisinage étale convenable de ξ est isomorphe à une action linéaire (action naturelle d'un groupe fini de racines de l'unité sur la droite affine $\mathbb{A}^1_T$). En particulier, pour tout élément non trivial γ de $\mathrm{I}(\xi)$, le schéma des points fixes de γ dans C est étale sur T au voisinage de ξ, et est indépendant du choix de γ.

Il résulte de cette étude locale que si π est modéré, il existe dans C un diviseur effectif $R^\bullet = \mathrm{Ram}^\bullet(\pi)$, étale sur T, tel que $\mathrm{I}(G,C)$ soit trivial au-dessus de $C - R^\bullet$ alors que sa restriction à $R^\bullet$ est étale sur $R^\bullet$. Utilisant l'action de G sur C, on voit de plus que l'image

$R_\bullet = \mathrm{Ram}_\bullet(\pi)$ de $R^\bullet$ dans Γ est encore un diviseur de Γ étale sur T, et que $R^\bullet$ et $R_\bullet$ sont liés par les relations

$$\begin{aligned} e\,R^\bullet &= \pi^*(R_\bullet) \\ \pi_*(R^\bullet) &= f\,R_\bullet \end{aligned} \qquad (7.2.3.1)$$

où e et f désignent respectivement les fonctions à valeurs entières « indice de ramification » et « nombre géométrique de points dans la fibre », qui sont localement constantes sur $R_\bullet$.

7.2.4 Remarque. On voit notamment que π est un « revêtement $R_\bullet$-modéré » au sens de [Fu] : de façon plus précise, pour tout sous-schéma artinien S_0 de S, la restriction de π au-dessus de S_0 est $R_{\bullet,S_0}$-modérée au sens de *loc. cit.*, 4.7.

7.2.5 Remarque. Il est commode de formuler ces propriétés dans le langage des structures logarithmiques (ou « log-structures ») de [Ka] : les diviseurs $R_\bullet$ et $R^\bullet$ définissent naturellement des log-structures sur Γ et C respectivement, pour lesquelles $\pi : C \to \Gamma$ induit un morphisme *log-étale* (ceci en raison de la première relation (7.2.3.1) et du fait que e est inversible dans $\mathcal{O}_\Gamma$, cf. [Ka], (3.5)).

7.2.6 Proposition. *Avec les notations de* 7.2.1, *considérons le morphisme d'oubli*

$$\begin{array}{rrcl} \omega : & \mathsf{REV}(G,X) & \longrightarrow & \mathsf{M}_S \\ & (C \xrightarrow{\pi} \Gamma \to T, \rho, \varepsilon, \alpha) & \longmapsto & (\Gamma, \varepsilon) \end{array}$$

de $\mathsf{REV}(G,X)$ *vers le* S*-champ* M_S *des* S*-courbes nodales pointées de genre* 0 *(*7.1.8*).*

Alors la restriction de ω *à* $\mathsf{MOD}(G,X)$ *est* lisse.

En particulier, le champ $\mathsf{MOD}(G,X)$ *est lisse sur* S*, et* (d'après 6.3.2) *le sous-champ* $\mathsf{MOD}^0(G,X) := \mathsf{MOD}(G,X) \cap \mathsf{REV}^0(G,X)$ *est dense dans* $\mathsf{MOD}(G,X)$*.*

Démonstration. On remarque que la restriction de ω à $\mathsf{MOD}(G,X)$ se factorise en

$$\begin{array}{rcccl} \mathsf{MOD}(G,X) & \xrightarrow{\quad u \quad} & \widetilde{\mathsf{M}}_S & \xrightarrow{\quad v \quad} & \mathsf{M}_S \\ (C \xrightarrow{\pi} \Gamma \to T, \rho, \varepsilon, \alpha) & \longmapsto & (\Gamma, \varepsilon, \mathrm{Ram}_\bullet(\pi)) & & \\ & & (\Gamma, \varepsilon, D) & \longmapsto & (\Gamma, \varepsilon) \end{array}$$

où un objet de $\widetilde{\mathsf{M}}_S(T)$ est, par définition, de la forme (Γ, ε, D) où (Γ, ε) est nodale pointée de genre 0 sur T et où D est un sous-schéma fermé de $\mathrm{Reg}(\Gamma/T)$, fini étale sur T.

Le morphisme v est *représentable et lisse* : si l'on fixe le degré, disons d, de D sur la base il est en effet clair que le sous-champ $\widetilde{\mathsf{M}}_S^{(d)}$ obtenu est un ouvert de la d-ième puissance symétrique de l'ouvert de lissité de la courbe universelle sur M_S.

Il suffit donc de montrer que u est étale, ce qui résulte de la proposition « bien connue » ci-dessous. ■

7.2.7 Proposition. *Soient* S*,* G*,* X *comme en* 7.2.1*. On se donne :*

– une immersion fermée $T_0 \hookrightarrow T$ *de* S*-schémas, définie par un Idéal de carré nul ;*

– *une T-courbe nodale pointée* (Γ, ε) *;*

– *un sous-schéma fermé D de Γ, étale sur T ;*

– *un objet* $x_0 = (C_0 \xrightarrow{\pi_0} \Gamma_0 \to T_0, \rho_0, \varepsilon_0, \alpha_0)$ *de* $\mathsf{MOD}(G,X)(T_0)$, *où* $(\Gamma_0, \varepsilon_0)$ *est la restriction de* (Γ, ε) *à* T_0, *et où* $\mathrm{Ram}_\bullet(\pi_0) = D \times_T T_0$.

Alors il existe un objet $(C \xrightarrow{\pi} \Gamma \to T, \rho, \varepsilon, \alpha)$ *de* $\mathsf{MOD}(G,X)(T)$, *unique à isomorphisme unique près, relevant* x_0 *et tel que* $\mathrm{Ram}_\bullet(\pi) = D$.

Démonstration. Le morphisme log-étale $(C_0, \mathrm{Ram}^\bullet(\pi_0)) \to (\Gamma_0, \mathrm{Ram}_\bullet(\pi_0))$ déduit de π_0 se relève, d'après la théorie des déformations des log-schémas ([Ka], (3.14)), en un unique morphisme log-étale $\pi : (C, R^\bullet) \to (\Gamma, D)$. Localement pour la topologie étale, C est décrit par une équation de la forme $y^e = x$ où x est une équation locale de D dans Γ et où e est l'indice de ramification de π_0 au point considéré. Le morphisme π a donc la structure locale voulue (par exemple π est plat, C est lisse sur T au-dessus des points de D, etc.). D'autre part, vu l'unicité, l'action de G sur C_0 se prolonge automatiquement en une action sur C. On en déduit facilement les propriétés annoncées. ∎

7.2.8 Remarque. On peut aussi invoquer la remarque 7.2.4 et le théorème 4.8 de [Fu] : celui-ci donne directement 7.2.7 lorsque T est artinien, ce qui suffit (moyennant, toutefois, quelques sorites sur les morphismes étales).

L'auteur remercie Jean-Louis Colliot-Thélène, David Harbater et le rapporteur pour leurs remarques.

Références

[An] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Mém. Soc. Math. France 33 (1973), 5-79.

[Ar 1] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math. 36 (1969), 23-58.

[Ar 2] M. Artin, *Algebraization of formal moduli : I*, dans *Global Analysis*, volume dédié à K. Kodaira, Université de Tokyo (1969), 21-71.

[Ar 3] M. Artin, *Versal Deformations and Algebraic Stacks*, Invent. Math. 27 (1974), 165-189.

[Ba] H. Bass, *Algebraic K-Theory*, Benjamin (1968).

[B-L-R] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, *Néron Models*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), volume 21, Springer (1990).

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Rational connectedness and Galois covers of the projective line*, Ann. of Math. 151 (2000), 359-373.

[Dè-Des] P. Dèbes et B. Deschamps, *The Regular Inverse Galois Problem over Large Fields*, dans *Geometric Galois actions*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 243, vol. 2 (1997), 119-139 (Cambridge University Press).

[De-Mu] P. Deligne et D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math. 36 (1969), 75-109.

[Fe] D. Ferrand, *Conducteur, descente et pincement*, non publié (1970).

[Fu] W. Fulton, *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Ann. of Math. 90 (1969), 542-575.

[Gro 1] A. Grothendieck, *Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki (1960/61), exposé 221.

[Gro 2] A. Grothendieck (rédigé avec la collaboration de J. Dieudonné), *Éléments de géométrie algébrique, IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Troisième Partie)*, Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math. 28 (1966).

[Gru-R] L. Gruson et M. Raynaud, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. 13 (1971), 1-89.

[Ha-J] D. Haran et M. Jarden, *Regular lifting of covers over ample fields*, preprint (novembre 1999, révisé en mai 2000).

[Hb 1] D. Harbater, *Mock covers and Galois extensions*, J. Algebra 91 (1984), 281-293.

[Hb 2] D. Harbater, *Galois covers of the arithmetic line*, dans *Number Theory – New York 1984-85*, Lecture Notes in Math. 1240, Springer (1987), 165-195.

[Hb 3] D. Harbater, *Formal patching and adding branch points*, Amer. J. Math. 115 (1993), 487-508.

[Hb 4] D. Harbater, *Fundamental Groups of Curves in Characteristic p*, dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich 1994*, Birkhäuser (1995), 656-666.

[Hb-S] D. Harbater et K. F. Stevenson, *Patching and Thickening Problems*, J. Algebra 212 (1999), 272-304.

[Ka] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, dans *Algebraic analysis, geometry, and number theory : proceedings of the JAMI Inaugural Conference* (J.-I. Igusa, éd.), Johns Hopkins University Press (1989), 191-224.

[Kn] D. Knutson, *Algebraic Spaces*, Lecture Notes in Math. 203, Springer (1971).

[Ko] J. Kollár, *Rationally connected varieties over local fields*, Ann. of Math. 150 (1999) No 1, 357-367.

[L-MB] G. Laumon et L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), volume 39, Springer (1999).

[MB] L. Moret-Bailly, *Groupes de Picard et problèmes de Skolem II*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 22 (1989), 181-194.

[Mu] D. Mumford, *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*, Compositio Math. 24 (1972), 129-174.

[P 1] F. Pop, $\frac{1}{2}$ *Riemann existence theorem with Galois action*, dans *Algebra and Number Theory* (G. Frey et J. Ritte, éd.), de Gruyter, 1994.

[P 2] F. Pop, *Embedding problems over large fields*, Ann. of Math. 144 (1996), 1–34.

[S] J.-P. Serre, *Topics in Galois Theory*, Research Notes in Mathematics, Vol. 1, Jones and Bartlett (1992).