GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Polarisations de degré* 4 *sur les surfaces abéliennes.* Note (*) de **Laurent Moret-Bailly**, présentée par Henri Cartan.

On donne une description des surfaces abéliennes munies d'une polarisation de degré 4 dont le diviseur générique n'est pas lisse. Le seul cas non trivial permet d'obtenir, en caractéristique 2, une fibration en courbes semi stables de genre 2 sur $\mathbb{P}^1$, dont la jacobienne relative est un schéma abélien principalement polarisé non constant. Oort [1] avait déjà montré que le schéma de modules *grossier* des surfaces abéliennes principalement polarisées contient, en caractéristique positive, une courbe rationnelle propre.

*We give a description of abelian surfaces with a polarization of degree* 4 *whose generic divisor is not smooth, and deduce an example, in characteristic* 2, *of a nontrivial semistable family of curves of genus* 2 *over* $\mathbb{P}^1$ *whose relative Jacobian is an abelian scheme.*

Le présent travail a pour origine une question de M. Raynaud.

RAPPELS ET NOTATIONS (*cf.* Mumford [2], [3]). Soit $k$ un corps algébriquement clos. Si A est une $k$-variété abélienne et L un faisceau inversible sur A, on note $\varphi_{\mathrm{L}}$ le morphisme de A dans sa duale $\hat{\mathrm{A}}$ défini par $\varphi_{\mathrm{L}}(x) = \mathrm{T}_x^* \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}^{-1}$, où $\mathrm{T}_x$ désigne la translation par $x \in \mathrm{A}$. On note $\mathrm{K(L)}$ le noyau de $\varphi_{\mathrm{L}}$, et $\deg \mathrm{L}$ le degré de $\varphi_{\mathrm{L}}$ [c'est 0 si K(L) n'est pas fini]. On a $\deg \mathrm{L} = \chi(\mathrm{L})^2$. Si L est *ample*, K(L) est fini et $\mathrm{H}^i(\mathrm{A}, \mathrm{L}) = 0$ pour $i > 0$, donc $\deg \mathrm{L} = h^0(\mathrm{L})^2$. De plus, K(L) est alors muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée $e_{\mathrm{L}} : \mathrm{K(L)} \times \mathrm{K(L)} \to \mathrm{G}_m$, que l'on peut définir comme suit : K(L) opère par translations sur le système linéaire $|\mathrm{L}|$, d'où un morphisme $\rho : \mathrm{K(L)} \to \mathrm{PGL}(\mathrm{H}^0(\mathrm{L}))$. Si $x$ et $y \in \mathrm{K(L)}$ on relève $\rho(x)$ et $\rho(y)$ dans $\mathrm{GL}(\mathrm{H}^0(\mathrm{L}))$ : leur commutateur est alors une homothétie qui ne dépend pas des relèvements; c'est ce commutateur qui est noté $e_{\mathrm{L}}(x, y)$.

Si $\mathrm{H} \subset \mathrm{K(L)}$ est un sous-groupe totalement isotrope *maximal* pour $e_{\mathrm{L}}$, alors $|\mathrm{H}| = \deg \mathrm{L}$, et le sous-schéma $|\mathrm{L}|^{\mathrm{H}}$ de l'espace projectif $|\mathrm{L}|$ formé des points fixes sous H est un torseur sous le groupe $\mathrm{K(L)}/\mathrm{H} \approx \hat{\mathrm{H}}$ (dual de Cartier de H). En particulier le nombre des diviseurs du système $|\mathrm{L}|$ invariants par H est égal à $\mathrm{Card}\, \mathrm{Hom}_k(\mathrm{H}, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Card}\, \hat{\mathrm{H}}(k)$. Enfin si $\mathrm{H} \subset \mathrm{K(L)}$ est d'ordre premier, il est totalement isotrope pour $e_{\mathrm{L}}$.

THÉORÈME. *Soient $k$ un corps algébriquement clos, $p$ sa caractéristique,* A *une surface abélienne sur $k$,* L *un faisceau inversible ample sur* A *de degré* 4, $|\mathrm{L}|$ *le système linéaire associé* (qui est une droite projective). *Alors :*

1. *Quitte à translater* L, *on est dans l'un* (et un seul) *des cas suivants :*

(*a*) *il existe* $\mathrm{D} \in |\mathrm{L}|$ *qui est une courbe lisse de genre* 3;

(*b*) A *est produit de deux courbes elliptiques* E *et* F, *et* $\mathrm{L} = \mathcal{O}_{\mathrm{A}}(2\mathrm{E} + \mathrm{F})$;

(*c*) $p = 2$ *et* $(\mathrm{A}, \mathrm{L}) \approx (\mathrm{E} \times \mathrm{E}, \mathcal{O}_{\mathrm{E} \times \mathrm{E}}(\mathrm{E} \times \{e\} \cup \Gamma))$, *où* E *est une courbe elliptique de p-rang* 0 *sur $k$* (nécessairement isomorphe, comme on sait, à la courbe plane d'équation affine $y^2 + y = x^3$) *et* $\Gamma$ *le graphe d'un endomorphisme de degré* 2 *de* E.

2. *Le cas* (*b*) *est le seul où* $|\mathrm{L}|$ *admet une composante fixe, qui est alors* F.

3. *Le cas* (*c*) *est le seul où* $\mathrm{K(L)} \approx \alpha_2 \times \alpha_2$; *dans ce cas, les courbes de* $|\mathrm{L}|$ *sont intègres de genre géométrique* 2 *avec un point de rebroussement, sauf* 5 *d'entre-elles formées de deux courbes elliptiques tangentes à l'origine. Enfin si l'on éclate l'origine dans* A, *le transformé strict du système* $|\mathrm{L}|$ *définit une fibration* $\tilde{\mathrm{A}} \to \mathbb{P}^1$, *à fibre générique lisse de genre* 2, *avec cinq fibres singulières formées de deux courbes elliptiques transverses en un point.*

Remarquons tout de suite que l'assertion 2 est conséquence des autres. Fixons quelques notations. Nous identifierons $|\mathrm{L}|$ à la droite $\mathrm{P} = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{L})^\vee)$. Les courbes de $|\mathrm{L}|$ forment alors une famille $\mathbf{D} \to \mathrm{P}$, où $\mathbf{D}$ est un diviseur relatif pour la seconde projection de $\mathrm{A} \times \mathrm{P}$ sur P. Si R est une $k$-algèbre et $t \in \mathrm{P(R)}$, nous noterons $\mathrm{D}_t$ la fibre de $\mathbf{D}$ en $t$ : c'est « la courbe de $|\mathrm{L}|$ correspondant au point $t \in |\mathrm{L}|$ ». Enfin on rappelle que $\chi(\mathrm{L}) = 2$, et $(\mathrm{L}.\mathrm{L}) = 4$ par Riemann-Roch.

LEMME 1. — *Soit* $D_0$ *une fibre géométrique de* $\mathbf{D}$. *Alors* $D_0$ *est une courbe connexe de genre arithmétique* 3, *qui a l'une des formes suivantes :*

(I) $D_0$ *lisse de genre* 3;

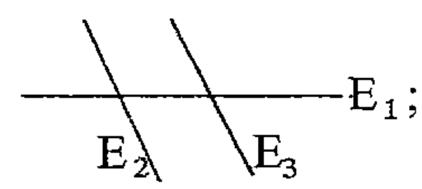
(II *a*) $D_0$ *intègre de genre géométrique* 2 *avec un point double ordinaire;*

(II *b*) $D_0$ *intègre de genre géométrique* 2 *avec un point de rebroussement;*

(III *a*) $D_0$ *réunion de deux courbes elliptiques se coupant transversalement en deux points;*

(III *b*) $D_0$ *réunion de deux courbes elliptiques tangentes en un point* (ce qui implique $p-2$, car l'intersection de ces deux courbes est, à translation près, un groupe radiciel d'ordre 2);

(IV *a*) $D_0$ *réunion de trois courbes elliptiques avec la configuration*




(IV *b*) *Comme en* (IV *a*) *avec* $E_2$ *et* $E_2$ *confondues* ($D_0 = E_1 \cup 2E_2$).

*Démonstration.* — On sait que A ne contient pas de courbes rationnelles, et que tout morphisme (de variétés) d'une courbe elliptique dans A est (à translation près) un morphisme de groupes. Par ailleurs, on utilisera le résultat facile suivant : si C et C′ sont deux courbes intègres sur A, on a $(C.C') \geqq 0$, et si $(C.C')=0$ alors C et C′ sont deux courbes elliptiques translatées l'une de l'autre.

Supposons $D_0$ non lisse. Ses composantes sont alors de genre géométrique 1 ou 2. Supposons que $D_0$ contienne une courbe C de genre géométrique 2.

Si C est singulière, elle est de genre arithmétique $\geq 3$, donc $D_0 = C$ : ce sont les cas (II *a*) et (II *b*).

Si C est lisse, on a $D_0 = C + D_1$. Comme $(D_0.D_0)=4$ et $(C.C)=2$, on a $(C.D_1)=1$ et $(D_1.D_1)=0$, donc $D_1$ est une courbe elliptique et la projection de C sur $A/D_1$ est un isomorphisme, ce qui est absurde.

Nous sommes donc ramenés au cas où $D_0$ est réunion de courbes elliptiques, que nous laissons au lecteur. ■

Si $|L|$ contient une courbe du type (I) [resp. (IV)] on est dans le cas (*a*) [resp. (*b*)] du théorème, et réciproquement. Nous dirons que (A, L) est bizarre si $|L|$ ne contient aucune courbe du type (I) ou (IV).

Notons $\eta$ le point générique de P, et $\bar{\eta}$ un point géométrique de P au-dessus de $\eta$.

LEMME 2. — *Si* (A, L) *est bizarre,* $D_\eta$ *est du type* (II *a*) *ou* (II *b*) *et son point singulier est l'unique point fixe de* $|L|$.

*Démonstration.* Soit $U \subset A$ le complémentaire de l'ensemble des points fixes. La projection $\mathbf{D} \cap (U \times P) \to U$ est alors un isomorphisme, ce qui montre que $D_\eta$ est *régulière* aux points de U. En particulier si $D_{\bar{\eta}}$ a des points doubles ordinaires ce sont des points fixes. Ceci exclut déjà que $D_\eta$ soit du type (III *a*) puisque $(L.L)=4$, et entraîne donc que $D_\eta$ a un seul point singulier. Mais cela signifie que le lieu singulier relatif de D sur P est radiciel sur P (si l'on oublie ses points isolés) donc est une courbe rationnelle : sa projection sur A est alors un point. Autrement dit le point singulier de $D_\eta$ est un point fixe. Il n'y a pas d'autre point fixe puisque $(L.L)=4$. Enfin un argument de rigidité montre que $D_\eta$ n'est pas du type (III *b*), ce qui achève de démontrer le lemme. ■

LEMME 3. *Supposons* (A, L) *bizarre, avec son point fixe à l'origine. Alors on est dans le cas* (*c*) *du théorème; de plus* (A, L) *vérifie toutes les propriétés énoncées dans la partie* 3 *du théorème.*

*Démonstration.* — Soient $t$ et $t'$ deux points distincts de $P(k)$. Comme $(L.L)-4$, les courbes $D_t$ et $D_{t'}$ ne sont pas tangentes (au sens fin) à l'origine. Cela signifie que, sur la surface $\tilde{A} \xrightarrow{\pi} A$ obtenue en éclatant l'origine, le transformé strict de $|L|$ [qui correspond au fibré $\tilde{L}-\pi^*(L)\otimes\mathcal{O}(-2E)$, où E est le diviseur exceptionnel] est sans point fixe. De plus, si $D_t$ est irréductible, sa transformée $\tilde{D}_t$ est lisse puisque :

$$3=\dim H^1(\mathcal{O}_{D_t})>\dim H^1(\mathcal{O}_{\tilde{D}_t})\geqq 2.$$

Nous obtenons donc grâce à $\tilde{L}$ une fibration $\tilde{A} \xrightarrow{f} P$, à fibre générique lisse de genre 2. Les seules fibres singulières possibles pour $f$ s'obtiennent en éclatant l'origine sur une courbe du type (III $a$) ou (III $b$); elles sont donc formées de deux courbes elliptiques transverses en un point. On a alors ([4], exposé XVI, prop. 2.1) :

$$1=\chi_{\mathrm{top}}(\tilde{A})=\chi_{\mathrm{top}}(P).\chi_{\mathrm{top}}(\tilde{D}_\eta)+(\text{nombre de fibres singulières}),$$

donc $f$ a exactement cinq fibres singulières.

Supposons $p\neq 2$. Alors $K(L)\approx(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ (le seul groupe d'ordre 4 muni d'une dualité alternée). Il admet trois sous-groupes totalement isotropes maximaux, isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; chacun d'eux laisse invariantes deux courbes de $|L|$, chacune ayant donc deux points singuliers : on obtient six courbes du type (III $a$), donc une de trop. On a donc $p=2$. Si $K(L)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\boldsymbol{\mu}_2$, on trouve :

$$\begin{cases}\text{une courbe invariante par } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ du type (III } a\text{)},\\ \text{deux courbes invariantes par } \boldsymbol{\mu}_2.\end{cases}$$

Mais comme toutes les courbes réductibles de $|L|$ ont un groupe de translations non trivial, on a donc au plus trois courbes réductibles : contradiction.

Donc K(L) est radiciel. Si le morphisme de Frobenius de K(L) n'était pas nul, son noyau serait le seul sous-groupe non trivial de K(L) et serait isomorphe à $\alpha_2$, d'où une seule courbe réductible.

Finalement K(L) est radiciel, à Frobenius nul, et autodual, donc isomorphe à $\alpha_2\times\alpha_2$, et les cinq courbes réductibles sont du type (III $b$), car le type (III $a$) est invariant par un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Prenons deux d'entre-elles, soit $E_1\cup F_1$ et $E_2\cup F_2$ : les courbes $E_1$ et $E_2$ sont de $p$-rang 0 (puisque A contient $\alpha_2\times\alpha_2$) et transverses à l'origine. Donc A s'identifie à $E_1\times E_2$; et comme $(E_2.F_1)=1$ et $(E_1.F_1)$ 2, la courbe $F_1$ est bien le graphe d'un morphisme de degré 2 de $E_1$ sur $E_2$.

Il nous reste à montrer que $D_{\bar{\eta}}$ est du type (II $b$). Si elle était du type (II $a$), la restriction de $f$ au diviseur exceptionnel E donnerait un morphisme *séparable* de degré 2 de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$, donc ramifié en un seul point (rappel : $p-2$). Or, il est ramifié pour chacune des cinq courbes du type (III $b$) : contradiction. ■

Enfin le lemme suivant montre l'existence d'objets bizarres :

LEMME 4. (i) *Si* (A, L) *est défini comme en* (*c*) *du théorème, alors* $K(L)\approx\alpha_2\times\alpha_2$.

(ii) *Si* $K(L)\approx\alpha_2\times\alpha_2$, *alors* (A, L) *est bizarre.*

Prouvons (i). Soient donc E de $p$-rang 0 sur $k$ de caractéristique 2, $e$ son origine, $\pi: E\to E$ une isogénie de degré 2, $\Gamma$ son graphe, H son noyau, $i_1$ (resp. $i_2$) l'injection $E \xrightarrow{\binom{\mathrm{Id}}{e}} E\times E$ (resp. $E \xrightarrow{\binom{e}{\mathrm{Id}}} E\times E$). Pour éviter des confusions, nous noterons $\dot{+}$ et $\dot{-}$ l'addition et la soustraction des diviseurs. Posons $D_0 - i_1(E) \dotplus \Gamma$, et $L = \mathcal{O}_{E \times E}(D_0)$. Il faut montrer que $H \times H \subset K(L)$ (cela suffit car $\deg L = 4$). Comme $D_0$ est invariant par $i_1(H)$ il suffit de voir que $H \subset \operatorname{Ker}(\varphi_L \circ i_2)$ ou, ce qui revient au même, que $H \subset \operatorname{Ker}(\hat{i}_1 \circ \varphi_L \circ i_2) \cap \operatorname{Ker}(\hat{i}_2 \circ \varphi_L \circ i_2)$ :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i_2"] & E \times E \arrow[r, "\varphi_L"] & (E \times E)^{\wedge} \arrow[r, "\hat{i}_1"] \arrow[dr, "\hat{i}_2"'] & \hat{E} \\ & & & \hat{E} \end{tikzcd}.$$

D'abord $\hat{i}_2 \circ \varphi_L \circ i_2 = \varphi_{i_2^*(L)} \quad 2\,\varphi_{\mathcal{O}_E(e)}$ : son noyau est le groupe des points d'ordre 2 de E, qui contient H.

D'autre part, soit $y \in E$, et soit $\Gamma'$ le graphe de $x \mapsto \pi(x) - y$. On a alors :

$$\hat{i}_1 \circ \varphi_L \circ i_2(y) = i_1^* \mathcal{O}_{E \times E}(E \times \{-y\} \dot{-} E \times \{e\} \dotplus \Gamma' \dot{-} \Gamma)$$
$$- \mathcal{O}_E(i_1^{-1}(\Gamma') \dot{-} i_1^{-1}(\Gamma)) = \pi^* \mathcal{O}_E((-y) \dot{-} (e)) \qquad \text{(vérification immédiate)}$$

donc $\operatorname{Ker}(\hat{i}_1 \circ \varphi_L \circ i_2) \quad \operatorname{Ker} \pi$.

C.Q.F.D.

Quant à (ii), supposons $K(L) \approx \alpha_2 \times \alpha_2$ : alors $K(L)$ admet une infinité de sous-groupes totalement isotropes maximaux (tous ceux isomorphes à $\alpha_2$). Cela signifie que, pour l'action naturelle de $K(L)$ sur P, l'ensemble des points de $P(k)$ ayant un stabilisateur non trivial est infini [et donc égal à $P(k)$]. Autrement dit toutes les courbes de $|L|$ sont munies d'une action libre de $\alpha_2$. Ces courbes ne peuvent alors être lisses de genre 3 (elles auraient un champ de vecteurs partout non nul). Le cas (*b*) du théorème étant évidemment exclu [car, avec les notations du théorème, $K(L)$ est alors le groupe des points d'ordre 2 de F], on en conclut bien que $(A.L)$ est bizarre. ■

*Remarque.* — Nous avons obtenu une famille non triviale de courbes de genre 2 sur $\mathbb{P}^1$, dont la jacobienne relative est propre. Inversement, partant d'un schéma abélien $\mathscr{A} \to \mathbb{P}^1$ principalement polarisé de dimension relative 2, on obtient une famille de courbes de genre 2 sur $\mathbb{P}^1$ en prenant le diviseur de la polarisation (pourvu toutefois que celle-ci provienne d'un faisceau inversible sur $\mathscr{A}$, *cf.* [5], 6.3), et les courbes singulières de la famille sont encore formées de deux courbes elliptiques transverses en un point. Nous donnerons dans [6] des exemples de telles familles en toute caractéristique positive. (Notons qu'en caractéristique 0 un schéma abélien sur $\mathbb{P}^1$ est nécessairement constant, *cf.* [1], 2.3.)

(*) Remise le 17 décembre 1979.

[1] F. Oort, *Invent. Math.*, 24, 1974, p. 95-119.
[2] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press.
[3] D. Mumford, *Invent. Math.*, 1, 1966, p. 287-354.
[4] P. Deligne et N. Katz, *SGA* 7 II (*Lecture Notes in Math.*, n° 340, Springer).
[5] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Springer.
[6] L. Moret-Bailly (à paraître).

85, *rue de Picpus*, 75012 *Paris*.