Fibrés principaux et adèles

Philippe Gille
Laurent Moret-Bailly

À paraître dans *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*
(accepté le 6 juin 2022)

Abstract : We investigate topological properties of torsors in algebraic geometry over adelic rings.

Résumé. Nous étudions les propriétés topologiques des torseurs en géométrie algébrique sur des anneaux d'adèles.

Keywords : Local fields, adèles, algebraic groups, homogeneous spaces, torsors.

MSC : 20G35, 14L30, 11D88.

1 Introduction

L'article [12] porte sur les propriétés topologiques des torseurs sous un groupe algébrique sur des corps valués, notamment de caractéristique positive. Étant donné un corps global K, son anneau des adèles $\mathbf{A}_K$ est un anneau topologique et il est naturel de considérer des questions analogues dans ce cadre. De façon plus précise, si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathbf{A}_K$-schémas qui est un G-torseur où G désigne un $\mathbf{A}_K$-schéma en groupes (tous de présentation finie), que peut-on dire de l'application $f_{\mathrm{top}} : X(\mathbf{A}_K)_{\mathrm{top}} \to X(\mathbf{A}_K)_{\mathrm{top}}$? Ici $X(\mathbf{A}_K)_{\mathrm{top}}$ (resp. $Y(\mathbf{A}_K)_{\mathrm{top}}$) désigne l'espace topologique associé à X (resp. à Y) selon Weil [28]. En particulier, a-t-on des conditions naturelles pour garantir que l'image de f_{top} est fermée ou localement fermée ?

Si G est affine lisse à fibres connexes, nous montrons que l'image I de f_{top} est fermée et que l'application $X(\mathbf{A}_K)_{\mathrm{top}} \to I$ est en outre une $G(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$-fibration principale (cor. 6.3). De façon analogue à l'article [12], notre approche ne nécessite pas d'imposer d'hypothèse de compacité locale pour les complétions de sorte que certains de nos résultats valent dans un cadre bien plus étendu qui inclut notamment celui du corps de fonctions d'une courbe algébrique définie sur un corps arbitraire, voir notamment le théorème 6.8. En fait, pour beacoup de nos énoncés, le corps « arithmétique » K sous-jacent ne joue aucun rôle, et les anneaux d'adèles considérés sont des produits restreints de familles plus ou moins arbitraires de corps valués.

Passons en revue les différentes sections de l'article. Le §2 donne lieu à quelques sorites sur les topologies produit et le §3 revient sur la topologie forte sur $X(A)$ pour X un schéma localement de type fini au dessus d'un anneau topologique A. Le cas d'un anneau de valuation hensélien est particulièrement important et nous raffinons plusieurs énoncés de [12, §3]. Le §4 met en place le cadre adélique dont nous avons besoin et les topologies induites sur les points adéliques des schémas. La section 5 est le cœur de l'article où est définie la propriété de presque propreté pour un morphisme $f : X \to Y$ de schémas adéliques, inspirée par un théorème d'Oesterlé [23, I.3.6], et qui est liée à la propriété d'image ouverte. C'est cette propriété que l'on étudie au §6 dans le cadre des torseurs et qui nous conduit aux résultats principaux.

Les auteurs remercient le rapporteur pour ses remarques.

2 Rappels topologiques

Définition 2.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue.*

(1) *Nous dirons que f est un plongement topologique si f induit un homéomorphisme de X sur $f(X)$.*

(2) *Nous dirons que f est une fibration (topologique) triviale s'il existe un espace F et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\sim", "u"'] \arrow[dr, "f"'] & & Y \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

où u est un homéomorphisme.

(3) *Nous dirons que f est une fibration topologique s'il existe un recouvrement de Y par des ouverts U tels que les applications induites $f^{-1}(U) \to U$ soient des fibrations triviales.*

(4) *Nous dirons que f admet assez de sections locales si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de $f(x)$ dans Y et une application continue $s : V \to X$ vérifiant $s(f(x)) = x$ et $f \circ s = \mathrm{Id}_V$. Si, de plus, on peut prendre $V = Y$ pour tout x, nous dirons que f admet assez de sections.*

Une application ayant assez de sections locales est en particulier ouverte.

2.1 Topologies produits

Lemme 2.2. *Soient V un ensemble et $(X_v)_{v\in V}$ une famille indexée par V d'espaces topologiques ; pour chaque $v \in V$, soit Z_v un sous-espace de X_v. On pose $X = \prod_{v\in V} X_v$ et $Z = \prod_{v\in V} Z_v$, munis des topologies produits ; on note $\overline{Z_v}$ l'adhérence de Z_v dans X_v, et $\overline{Z}$ celle de Z dans X.*

(i) *Si Z_v est ouvert dans X_v pour tout v, et si $Z_v = X_v$ pour presque tout v, alors Z est ouvert dans X.*

(ii) *L'inclusion $Z \subset X$ est un plongement topologique, et $\overline{Z} = \prod_{v\in V} \overline{Z_v}$.*

(iii) *Si Z_v est fermé dans X_v pour tout v, alors Z est fermé dans X.*

(iv) *Si Z_v est localement fermé dans X_v pour tout v, et fermé pour presque tout v, alors Z est localement fermé dans X.* ∎

Démonstration: (i) est clair par définition de la topologie produit. Pour (ii) (qui implique trivialement (iii)), voir [2, I, §4, n° 2, cor. de la prop. 3] et [2, I, §4, n° 3, prop. 7]. Enfin, l'assertion (iv) résulte de (i) et (ii) appliquées en remplaçant les X_v par les $\overline{Z_v}$. ∎

La preuve du corollaire suivant est laissée au lecteur.

Corollaire 2.3. *Soient V un ensemble et $(f_v : X_v \to Y_v)_{v\in V}$ une famille indexée par V d'applications continues. Notons $f : X = \prod_{v\in V} X_v \to Y = \prod_{v\in V} Y_v$ l'application produit.*

(i) *L'application naturelle $\mathrm{Im}\,(f) \to \prod_{v\in V} \mathrm{Im}\,(f_v)$ est un homéomorphisme.*

(ii) *Si, pour tout $v \in V$, f_v admet assez de sections, alors il en est de même de f.*

(iii) *Si f_v admet assez de sections locales pour tout $v \in V$, et admet assez de sections pour presque tout v, alors f admet assez de sections locales.* ∎

3 Rappels locaux

3.1 Anneaux locaux topologiques

Nous appellerons <u>anneau local topologique</u> un anneau local $(A, \mathfrak{m})$, muni d'une topologie compatible avec sa structure d'anneau, et vérifiant de plus les propriétés suivantes :

(LT 1) $A^\times$ est ouvert dans A (de façon équivalente, $\mathfrak{m}$ est fermé) ;

(LT 2) l'application $z \mapsto z^{-1}$ est continue sur $A^\times$ (de sorte que $(A^\times, .)$ est un groupe topologique).

Exemples 3.1.

(1) Tout corps topologique (séparé) est un anneau local topologique.

(2) Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local séparé et linéairement topologisé, c'est-à-dire admettant une base $\mathfrak{I}$ de voisinages de 0 formée d'idéaux [1]. A est un anneau local topologique. Voici les deux cas particuliers les plus importants :

(i) A est un anneau de valuation (voir §3.5), muni de la topologie associée ; on peut prendre pour $\mathfrak{I}$ l'ensemble des idéaux non nuls de A, ou encore l'ensemble des idéaux principaux non nuls ;

(ii) $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local noethérien, et $\mathfrak{I} = \{\mathfrak{m}^n\}_{n \geq 1}$.

En pratique, nous utiliserons dans cet article les cas (1) et (2) (i).

3.2 Schémas sur un anneau local topologique : topologie sur les sections.

Soit A un anneau local topologique. D'après [4, Proposition 3.1], pour tout A-schéma $\mathfrak{X}$ localement de type fini on peut définir une topologie sur $\mathfrak{X}(A)$, donnant naissance à un foncteur $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}(A)_{\text{top}}$ à valeurs dans les espaces topologiques, avec les propriétés suivantes :

— le foncteur $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}(A)_{\text{top}}$ commute aux produits fibrés ;

— il transforme les immersions fermées (resp. ouvertes) en plongements topologiques fermés (resp. ouverts) ;

— la topologie de $\mathbb{A}^1(A)_{\text{top}}$ est la topologie donnée sur A.

La topologie sur $\mathfrak{X}(A)$ est engendrée par les ensembles de la forme

$$\{x \in \mathfrak{U}(A) \mid \varphi(x) \in V\}$$

où $\mathfrak{U}$ désigne un sous-schéma ouvert de $\mathfrak{X}$, V un ouvert de A et $\varphi \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$. En outre, on peut restreindre le choix de $\mathfrak{U}$ aux ouverts d'un recouvrement affine donné, celui de V à une base d'ouverts de A, et celui de φ à une famille de générateurs de la A-algèbre $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$. Noter que si $\mathfrak{X} = \operatorname{Spec}(R)$ est affine, ceci peut s'exprimer en disant que l'inclusion naturelle de $\mathfrak{X}(A) = \operatorname{Hom}_{A\text{-alg}}(R, A)$ dans le produit A^R est un plongement topologique.

Remarque 3.2. Dans cette construction, le fait que A soit local assure que si $(\mathfrak{U}_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de $\mathfrak{X}$, alors $\mathfrak{X}(A)$ est réunion des $\mathfrak{U}_i(A)$. Les conditions (LT 1) et (LT 2) de 3.1 entraînent que si $\mathfrak{X} = \operatorname{Spec}(R)$ est affine, et si $f \in R$, alors l'inclusion $D(f) \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est un plongement topologique ouvert pour les topologies « affines » décrites ci-dessus.

1. Il faut prendre garde que, en général, les idéaux ne sont pas ouverts. Exemple : l'idéal nul, ou (x) dans $k[[x, y]]$)

3.3 Le cas linéairement topologisé.

Soit A un anneau local topologique. Supposons A séparé et linéairement topologisé, et soit $\mathfrak{I}$ une base de voisinages de 0 formée d'idéaux stricts.

Si $\mathfrak{X}$ est un A-schéma localement de type fini, on peut alors construire $\mathfrak{X}(A)_{\mathrm{top}}$ plus directement [12, §3.3] en déclarant qu'une base de voisinages ouverts (et fermés) d'un point $x \in \mathfrak{X}(A)$ est donnée par les « boules »

$$B_{\mathfrak{X}}(x, J) := \{y \in \mathfrak{X}(A) \mid y \equiv x \bmod J\} \qquad (J \in \mathfrak{I})$$

où « $y \equiv x \bmod J$ » signifie que x et y ont la même image dans $\mathfrak{X}(A/J)$. En d'autres termes, on munit $\mathfrak{X}(A)$ de la topologie induite par l'application naturelle (injective, puisque A est séparé) $\mathfrak{X}(A) \hookrightarrow \varprojlim_{J\in\mathfrak{I}} \mathfrak{X}(A/J)$, les ensembles $\mathfrak{X}(A/J)$ étant munis de la topologie discrète.

Noter qu'en particulier $\mathfrak{X}(A)_{\mathrm{top}}$ est toujours séparé ; en outre, pour tout idéal ouvert J fixé, il peut se décrire comme une somme topologique

$$\mathfrak{X}(A)_{\mathrm{top}} = \coprod_{x\in\Sigma} B_{\mathfrak{X}}(x, J) \tag{3.1}$$

où $\Sigma \subset \mathfrak{X}(A)$ désigne un système représentatif des boules de rayon J.

Proposition 3.3. (Structure des morphismes lisses). *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local topologique séparé et linéairement topologisé. On suppose de plus que A est hensélien, et l'on fixe un idéal ouvert strict J de A.*

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux A-schémas localement de type fini, et $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un A-morphisme lisse de dimension relative d. On considère l'application continue induite $f_{\mathrm{top}} : \mathfrak{X}(A)_{\mathrm{top}} \to \mathfrak{Y}(A)_{\mathrm{top}}$.

(1) (Fonctions implicites) *Soit $x \in \mathfrak{X}(A)$ et posons $y = f(x)$. Alors l'application*

$$B_{\mathfrak{X}}(x, J) \to B_{\mathfrak{Y}}(y, J)$$

induite par f_{top} est une fibration topologique triviale de fibre J^d[2]. En particulier, f_{top} est ouverte, et est un homéomorphisme local si f est étale.

(2) *L'image de f_{top} s'écrit de façon unique*

$$\mathrm{Im}(f_{\mathrm{top}}) = \coprod_{\lambda\in L} B_\lambda$$

où les B_λ sont des boules de rayon J dans $\mathfrak{Y}(A)_{\mathrm{top}}$; en particulier elle est ouverte et fermée.

2. Ici, J^d désigne évidemment l'espace produit, et non l'idéal produit.

(3) *La surjection canonique* $\overline{f_{\mathrm{top}}} : \mathfrak{X}(A)_{\mathrm{top}} \to \mathrm{Im}(f_{\mathrm{top}})$ *admet assez de sections (cf. 2.1).*

Démonstration: (1) Le cas étale (c'est-à-dire $d = 0$) est une conséquence directe de la propriété hensélienne de A ; voir [12, Proposition 3.3.2]. Le cas général s'en déduit aisément à l'aide d'une factorisation locale

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{\text{étale}} \mathfrak{Y} \times \mathbb{A}^d \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathfrak{Y}$$

de f au voisinage de x (voir [6, I.4.4.2], ou [17, 17.11.4]).

(2) D'après (1), l'image de f_{top} est réunion de boules de rayon J ; comme ces boules forment une partition de $\mathfrak{Y}(A)_{\mathrm{top}}$ et sont ouvertes et fermées, (2) en résulte.

(3) est conséquence immédiate de (1) et (2). ∎

3.4 Changement d'anneau

Soit $u : A \to K$ un homomorphisme continu (non nécessairement local) d'anneaux locaux topologiques. (Le cas qui nous intéressera dans la suite est celui où A est un anneau de valuation et K son corps des fractions.)

Si $\mathfrak{X}$ est un A-schéma localement de type fini, $\mathfrak{X}(K)$ s'identifie à $\mathfrak{X}_K(K)$ où $\mathfrak{X}_K$ est le K-schéma déduit de $\mathfrak{X}$ par changement de base. À ce titre, $\mathfrak{X}(K)$ est muni d'une topologie, et l'on a une application naturelle $\mathfrak{X}(A) \to \mathfrak{X}(K)$.

Lemme 3.4

(1) *Avec les hypothèses et notations de* 3.4, *l'application naturelle* $\mathfrak{X}(A) \to \mathfrak{X}(K)$ *est continue.*

(2) *Si de plus u est injectif et fait de A un sous-anneau ouvert de K, alors cette application est ouverte ; en particulier, c'est un plongement topologique ouvert si $\mathfrak{X}$ est séparé.*

Démonstration: les assertions (1) et (2) sont immédiates par réduction au cas affine. ∎

3.5 Valuations et valeurs absolues : rappels et conventions

Dans cet article, une valeur absolue sur un corps K est la donnée d'un groupe abélien totalement ordonné $(\Gamma, \cdot, 1, \leq)$, noté multiplicativement et augmenté d'un plus petit élément noté 0, et d'une application

$$\begin{array}{rrcll} \mathrm{abs} : & K & \longrightarrow & \Gamma \cup \{0\} & \\ & z & \longmapsto & \mathrm{abs}(z) & \text{(également noté } |z|) \end{array}$$

avec les propriétés habituelles : $\mathrm{abs}^{-1}(0) = \{0\}$, $|zz'| = |z|\,|z'|$, et :

— ou bien (cas ultramétrique) $|z+z'| \leq \max(|z|,|z'|)$, donc « abs » est une valuation (avec les conventions multiplicatives), d'anneau $O_{\text{abs}} = \{z \in K|\ \text{abs}(z) \leq 1\}$;

— ou bien (cas archimédien) $\Gamma \subset \mathbb{R}_{>0}$ et « abs » est une valeur absolue archimédienne. Dans ce cas, nous conviendrons de poser $O_{\text{abs}} := K$.

Un corps valué est un corps muni d'une valeur absolue. Un corps valué (K, Γ, abs) est un corps topologique : une base de voisinages de $z_0 \in K$ est donnée par les boules $B(z_0, \rho) := \{z \in K|\ \text{abs}(z - z_0) < \rho\}$, où ρ parcourt Γ. Le complété de K pour cette topologie est noté $\widehat{K}$; c'est un corps valué, qui dans le cas archimédien est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$.

Un corps valué (K, abs) est dit hensélien si pour toute extension finie L de K, il existe une unique valeur absolue sur L prolongeant celle de K. (Il existe toujours au moins un tel prolongement). Il est dit admissible s'il est hensélien et si $\widehat{K}$ est une extension séparable de K. (Bien entendu, cette dernière condition est satisfaite si K est parfait, ou s'il est complet.)

Un corps valué ultramétrique (K, abs) est hensélien si et seulement si O_{abs} est un anneau local hensélien [10, th. 4.1.3].

Un corps valué archimédien (K, abs) est hensélien (et admissible !) si et seulement si K est algébriquement clos (lorsque $\widehat{K} \cong \mathbb{C}$) ou réel clos (lorsque $\widehat{K} \cong \mathbb{R}$) : voir par exemple [9, (26.8) et (26.9)]. Dans les deux cas, il revient au même de dire que K est algébriquement fermé dans $\widehat{K}$.

Sur un corps valué hensélien, l'énoncé 3.3 admet la variante suivante :

Proposition 3.5 (Fonctions implicites, cas d'un corps valué) *Soit K un corps valué hensélien et soit $f : X \to Y$ un morphisme lisse de K-schémas de type fini, de dimension relative d. Soient $x \in X(K)$ et $y = f(x)$.*

(1) *Il existe un voisinage Ω de 0 dans K, et des voisinages $U \subset X(K)_{\text{top}}$ et $V \subset Y(K)_{\text{top}}$ de x et y respectivement, tels que $f_{\text{top}}(U) = V$ et que l'application $U \to V$ induite soit une fibration triviale de fibre Ω^d.*
En particulier, f_{top} est ouverte (et est un homéomorphisme local si f est étale), et la surjection canonique $X(K)_{\text{top}} \to \text{Im}\,(f_{\text{top}})$ admet assez de sections locales.

(2) *Si K est ultramétrique, la surjection canonique $X(K)_{\text{top}} \to \text{Im}\,(f_{\text{top}})$ admet assez de sections.*

Démonstration : La partie (1) se déduit facilement de 3.3 dans le cas ultramétrique. Supposons K archimédien. Si K est complet, alors $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et il s'agit du théorème des fonctions implicites classique. En général, il suffit de traiter le cas étale (même argument que dans 3.3 (1)). On considère alors le morphisme $\widehat{f} : X_{\widehat{K}} \to Y_{\widehat{K}}$ déduit de f par changement de base. Considérons le diagramme commutatif d'espaces topologiques

$$\begin{array}{ccc} X(K) & \subset & X(\widehat{K}) \\ {\scriptstyle f_{\text{top}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{f}_{\text{top}}} \\ Y(K) & \subset & Y(\widehat{K}) \end{array}$$

où $\widehat{f}_{\text{top}}$ est un homéomorphisme local d'après le cas complet.

Montrons que $X(K) = \widehat{f}_{\text{top}}^{-1}(Y(K))$. Si $y \in Y(K)$, le K-schéma $X_y = f^{-1}(y)$ est fini puisque f est étale ; en particulier ses corps résiduels sont algébriques sur K, de sorte que $X_y(K) = X_y(\widehat{K})$ puisque K est algébriquement fermé dans $\widehat{K}$, d'où notre assertion.
(2) Supposons K ultramétrique. En vertu de la proposition 7.4, $\mathrm{Im}(f_{\text{top}})$ est un espace ultraparacompact ; comme l'application envisagée a assez de sections locales, il s'ensuit facilement qu'elle a assez de sections. ∎

Proposition 3.6. *Soit K un corps valué admissible.*

(1) *Soit X un K-schéma de type fini. Alors $X(K)$ est dense dans $X(\widehat{K})_{\text{top}}$.*

(2) *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre de K-schémas de type fini. Alors l'image de $f_{\text{top}} : X(K)_{\text{top}} \to Y(K)_{\text{top}}$ est fermée.*

Démonstration: dans le cas ultramétrique, voir [21, 1.2.1] pour (1), et [21, 1.3] pour (2).

Supposons K archimédien, et montrons (1). On peut supposer X réduit ; il est alors réunion finie de sous-K-schémas localement fermés lisses (K est de caractéristique nulle). Ceci nous ramène au cas où X est lisse, puis, quitte à le remplacer par un ouvert convenable, au cas où l'on a un K-morphisme étale $\pi : X \to \mathbb{A}^n_K$. Soit $\Omega \subset X(\widehat{K})_{\text{top}}$ un ouvert non vide, et montrons que $\Omega \cap X(K) \neq \emptyset$. L'application induite $\widehat{\pi}_{\text{top}} : X(\widehat{K}) \to \widehat{K}^n$ est ouverte d'après 3.5, de sorte que $\widehat{\pi}_{\text{top}}(\Omega)$ est ouvert dans $\widehat{K}^n$ et contient donc un point $z \in K^n$ puisque K est dense dans $\widehat{K}$. On a donc $z = \widehat{\pi}(y)$ pour un point $y \in \Omega$, mais on a nécessairement $y \in X(K)$ par le même argument que dans la preuve de 3.5 (π est quasi-fini, $\pi(y)$ est K-rationnel et K est algébriquement fermé dans $\widehat{K}$) : nous avons bien trouvé un point de $X(K) \cap \Omega$.

Montrons enfin (2) dans le cas archimédien ; l'argument est encore analogue à celui de 3.5. Comme f est propre et $\widehat{K}$ localement compact, $\widehat{f}_{\text{top}} : X(\widehat{K}) \to Y(\widehat{K})$ est topologiquement propre, de sorte que son image est fermée. Donc, si $y \in Y(K)$ est adhérent à $\mathrm{Im}\,(f_{\text{top}})$, on a $y \in \mathrm{Im}(\widehat{f}_{\text{top}})$, d'où $X_y(\widehat{K}) \neq \emptyset$. L'assertion (1) appliquée à X_y implique alors que $X_y(K) \neq \emptyset$, et l'on conclut que $y \in \mathrm{Im}(f_{\text{top}})$. ∎

4 Produits et produits restreints

4.1 Produits d'anneaux locaux topologiques

On fixe un ensemble V et une famille $(A_v)_{v\in V}$, indexée par V, d'anneaux locaux topologiques (3.1). On pose $A := \prod_{v\in V} A_v$; c'est un anneau topologique, pour la topologie produit.

Soit $\mathfrak{X}$ un A-schéma. Pour chaque $v \in V$, on obtient par changement de base (par la projection $A \to A_v$) un A_v-schéma noté $\mathfrak{X}_v$, et $\mathfrak{X}_v(A_v)$ s'identifie à $\mathfrak{X}(A_v)$. On a une application naturelle

$$\mathfrak{X}(A) \longrightarrow \prod_{v\in V} \mathfrak{X}_v(A_v). \tag{4.1}$$

Cette application est bijective si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact et quasi-séparé [4, Theorem 3.6] [3], et notamment si $\mathfrak{X}$ est <u>de présentation finie</u> sur A. Dans ce dernier cas, on peut donc munir $\mathfrak{X}(A)$ de la topologie produit des topologies naturelles sur les facteurs du membre de droite de (4.1). On obtient un espace topologique noté $\mathfrak{X}(A)_{\text{top}}$. Cette construction est fonctorielle en $\mathfrak{X}$, commute aux produits fibrés, transforme les immersions fermées en plongements topologiques fermés et les immersions ouvertes en plongements topologiques (non ouverts en général). En outre, l'espace $\mathfrak{X}(A)_{\text{top}}$ est séparé si $\mathfrak{X}$ est séparé. Si $\mathfrak{X} = \mathbb{A}^n_A$, l'espace $\mathfrak{X}(A)_{\text{top}}$ s'identifie à A^n avec sa topologie naturelle.

4.2 Produits restreints de corps valués

On fixe un ensemble d'indices V et une famille $\underline{K} = (K_v, \text{abs}_v)_{v\in V}$ de corps valués. Pour $v \in V$ et $z \in K_v$, on utilisera aussi la notation $|z|_v$ pour $\text{abs}_v(z)$.

Remarque 4.1. Dans les applications classiques, les K_v sont les complétés d'un même corps K pour une famille V de valuations. Cependant, K ne joue aucun rôle dans les généralités sur la topologie adélique, et n'interviendra pas avant la section 6.5 ; d'autre part, l'hypothèse que les K_v soient complets peut le plus souvent être remplacée par une hypothèse hensélienne.

On note V_∞ l'ensemble des $v \in V$ tels que K_v soit archimédien. Pour $v \notin V_\infty$, abs_v est donc une valuation dont l'anneau sera noté O_v. Pour $v \in V_\infty$, on posera $O_v = K_v$.

3. L'argument utilise le fait que les anneaux K_v et O_v $(v \in V)$ sont tous locaux ; cette restriction n'est en fait pas nécessaire, cf. [1, Theorem 1.3] mais il s'agit d'un résultat bien plus profond.

Pour $S \subset V$ fini, on considère l'anneau topologique produit

$$\mathbf{A}_{\underline{K},S} := \prod_{v\in S} K_v \times \prod_{v\notin S} O_v.$$

Pour $S \subset S'$ (tous deux finis), $\mathbf{A}_{\underline{K},S}$ est un sous-anneau ouvert de $\mathbf{A}_{\underline{K},S'}$ (et $\mathbf{A}_{\underline{K},S'}$ est un localisé de $\mathbf{A}_{\underline{K},S}$). Le produit restreint des K_v, relativement aux O_v, est par définition l'anneau topologique

$$\mathbf{A}_{\underline{K}} := \varinjlim_{S \text{ fini } \subset V} \mathbf{A}_{\underline{K},S}.$$

On peut le voir comme un sous-anneau de $\prod_{v\in V} K_v$ mais sa topologie n'est pas induite par la topologie produit. Lorsque l'on raisonne sur la topologie de $\mathbf{A}_{\underline{K}}$, il est utile de se souvenir que chaque anneau produit $\mathbf{A}_{\underline{K},S}$ s'identifie à un sous-anneau ouvert de $\mathbf{A}_{\underline{K}}$.

4.3 Points des schémas à valeurs dans un produit restreint ; topologie adélique

Dans tout le §4.3, on fixe $\underline{K} = (K_v, \mathrm{abs}_v)_{v\in V}$ comme dans 4.2. Si X est un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma de présentation finie, on se propose de construire une topologie naturelle, dite adélique, sur l'ensemble $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})$, selon une méthode due à Weil [28] dans le cas des adèles d'un corps global. Nous suivons la présentation de [4] auquel nous renvoyons pour les détails. Noter qu'il n'est pas nécessaire, même dans le cas classique des complétés d'un corps global K, de se limiter aux $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schémas provenant de K-schémas de type fini.

4.3.1 ***S*-modèles d'un schéma ; définition de la topologie adélique.** Soit X un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma de présentation finie. Comme $\mathbf{A}_{\underline{K}}$ est limite inductive filtrante des $\mathbf{A}_{\underline{K},S}$, il existe d'après [17, §8] une partie finie S de V, un $\mathbf{A}_{\underline{K},S}$-schéma $\mathfrak{X}_S$ de présentation finie et un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-isomorphisme $\mathbf{A}_{\underline{K}} \otimes_{\mathbf{A}_{\underline{K},S}} \mathfrak{X}_S \cong X$; on dira que $\mathfrak{X}_S$ est un S-modèle de X. Dans ces conditions, l'application naturelle

$$\varinjlim_{S'\supset S} \mathfrak{X}_S(\mathbf{A}_{\underline{K},S'}) \longrightarrow X(\mathbf{A}_{\underline{K}}) \tag{4.2}$$

est bijective (où S' parcourt les parties finies de V contenant S). On munit alors $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})$ de la topologie limite inductive déduite de (4.2), cf. [8, App. II.I]. On notera $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$ l'espace topologique ainsi obtenu ; il est indépendant du choix du modèle $\mathfrak{X}_S \to \mathrm{Spec}(\mathbf{A}_{\underline{K},S})$. Si Y désigne un espace topologique, une application $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to Y$ est continue si chaque application induite $X(\mathbf{A}_{\underline{K},S})_{\mathrm{top}} \to Y$ est continue.

4.3.2 Propriétés de la topologie adélique. Gardons les notations de 4.3. Le système inductif des espaces $\mathfrak{X}_S\left(\mathbf{A}_{\underline{K},S'}\right)_{\text{top}}$, dont $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$ est la colimite, admet la propriété agréable suivante, conséquence de 3.4 : pour $S \subset S' \subset S''$, l'application de transition

$$\mathfrak{X}_S\left(\mathbf{A}_{\underline{K},S'}\right)_{\text{top}} \to \mathfrak{X}_S\left(\mathbf{A}_{\underline{K},S''}\right)_{\text{top}}$$

est continue et <u>ouverte</u>, et est un plongement topologique ouvert si $\mathfrak{X}_S$ est séparé (ce que l'on peut toujours supposer lorsque X est séparé, cf. [17, 8.10.4]). Par suite, on a les mêmes propriétés pour les applications naturelles $\mathfrak{X}_S\left(\mathbf{A}_{\underline{K},S'}\right)_{\text{top}} \to X\left(\mathbf{A}_{\underline{K}}\right)_{\text{top}}$. L'étude d'un espace $X\left(\mathbf{A}_{\underline{K}}\right)_{\text{top}}$ se fait donc généralement en deux étapes :

- — choix d'un modèle $\mathfrak{X}_S$ adapté, et étude des espaces $\mathfrak{X}_S\left(\mathbf{A}_{\underline{K},S'}\right)_{\text{top}}$: ceux-ci sont des espaces produits, justiciables d'énoncés généraux tels que ceux de 2.1 ;
- — passage à la limite, utilisant le fait que les $\mathfrak{X}_S\left(\mathbf{A}_{\underline{K},S'}\right)_{\text{top}}$ sont ouverts dans $X\left(\mathbf{A}_{\underline{K}}\right)_{\text{top}}$.

La construction $X \mapsto X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$ est fonctorielle en X, commute aux produits fibrés, transforme les immersions fermées en plongements topologiques fermés, les immersions ouvertes en plongements topologiques, les schémas séparés en espaces séparés ; en outre, $(\mathbb{A}^n_{\mathbf{A}_{\underline{K}}})_{\text{top}}$ s'identifie à $(\mathbf{A}_{\underline{K}})^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.3.3 Groupes et torseurs. La compatibilité aux produits implique notamment que si G est un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$- schéma en groupes de présentation finie opérant sur X, alors $G(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$ est un groupe topologique opérant continûment sur $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$.

L'objet de cet article est d'étudier la question suivante, en analogie avec le cas d'un corps valué [12].

Question. Soient G un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma en groupes de présentation finie et $f : X \to Y$ un G-torseur, où X et Y sont des $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schémas de présentation finie. Considérons l'application $f_{\text{top}} : X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}} \to Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$ induite sur les points adéliques, et son image $I \subset Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$.

- — À quelles conditions (sur G, notamment) I est-elle localement fermée (resp. ouverte, fermée) dans $Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$?
- — L'application induite $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}} \to I$ est-elle un G_{top}-fibré principal ?

4.3.4 S-modèles d'un morphisme. Pour simplifier, nous ne considérerons désormais que des $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schémas <u>séparés</u>, et des modèles séparés de ceux-ci.

Considérons un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schémas séparés de présentation finie[4]. Si S est une partie finie de V, nous appellerons S-modèle de f la donnée de S-modèles $\mathfrak{X}_S$ et $\mathfrak{Y}_S$ de X et Y et d'un $\mathbf{A}_{\underline{K},S}$-morphisme $F_S : \mathfrak{X}_S \to \mathfrak{Y}_S$ induisant f par le changement de base $\mathbf{A}_{\underline{K},S} \to \mathbf{A}_{\underline{K}}$. D'après [17, §8], un tel modèle existe toujours (pour S convenable) ; en outre, si $F^{(j)}_{S_j} : \mathfrak{X}_{S_j} \to \mathfrak{Y}_{S_j}$ $(j = 1, 2)$ sont deux modèles de f, il existe S fini contenant S_1 et S_2 et des isomorphismes $\mathfrak{X}_{S_1} \otimes_{\mathbf{A}_{\underline{K},S_1}} \mathbf{A}_{\underline{K},S} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_{S_2} \otimes_{\mathbf{A}_{\underline{K},S_2}} \mathbf{A}_{\underline{K},S}$ et $\mathfrak{Y}_{S_1} \otimes_{\mathbf{A}_{\underline{K},S_1}} \mathbf{A}_{\underline{K},S} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}_{S_2} \otimes_{\mathbf{A}_{\underline{K},S_2}} \mathbf{A}_{\underline{K},S}$ compatibles, au sens évident, avec $F^{(1)}_{S_1}$ et $F^{(2)}_{S_2}$.

4.4 Le diagramme des images

Dans ce numéro, on utilise les conventions suivantes pour les applications continues :

$\twoheadrightarrow$ = surjection $\qquad \hookrightarrow$ = injection $\qquad \xrightarrow{\cong}$ = homéomorphisme

$\overset{\bullet}{\hookrightarrow}$ = plongement topologique $\qquad \overset{\circ}{\hookrightarrow}$ = plongement topologique ouvert.

Soit $(K_v)_{v\in V}$ comme dans 4.2, et soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schémas séparés de présentation finie. Soient $S \subset V$ fini et $F_S : \mathfrak{X}_S \to \mathfrak{Y}_S$ un S-modèle (séparé) de f. Pour abréger, posons, pour tout $v \in V$,

$$O'_v := \begin{cases} K_v & \text{si } v \in S \\ O_v & \text{si } v \notin S \end{cases}$$

de sorte que $\mathbf{A}_{\underline{K},S} = \prod_{v\in V} O'_v$; en outre, le O'_v-morphisme $F_{S,v} : \mathfrak{X}_{S,v} \to \mathfrak{Y}_{S,v}$ déduit de F_S sera noté plus simplement $F_v : \mathfrak{X}_v \to \mathfrak{Y}_v$, et $F_{v,\mathrm{top}}$ désignera l'application continue induite $\mathfrak{X}_S(O'_v)_{\mathrm{top}} \to \mathfrak{Y}_S(O'_v)_{\mathrm{top}}$.

Notre but est d'étudier l'image de $f_{\mathrm{top}} : X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$ et ses liens avec les images des applications locales (i.e. $f_{v,\mathrm{top}}$ et $F_{v,\mathrm{top}}$) et S-adéliques (i.e. $F_{S,\mathrm{top}}$). La situation est résumée par le diagramme commutatif

4. Rappelons qu'un tel morphisme est séparé [26, 25.21.13, Tag 01KV], [16, (5.3.1.(v))].

d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{v\in V} \mathfrak{X}_S(O'_v)_{\mathrm{top}} \arrow[r, two heads, "\prod_v \overline{F}_{v,\mathrm{top}}"] & \prod\limits_{v\in V} \mathrm{Im}\,(F_{v,\mathrm{top}}) \arrow[r, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{(A)}"] & \prod\limits_{v\in V} \mathfrak{Y}_S(O'_v)_{\mathrm{top}} \\
\mathfrak{X}_S(\mathbf{A}_{\underline{K},S})_{\mathrm{top}} \arrow[u, "\varphi_X"', "\cong"] \arrow[r, two heads, "\overline{F}_{S,\mathrm{top}}"] \arrow[d, hook, "j_X"'] & \mathrm{Im}\,(F_{S,\mathrm{top}}) \arrow[u, "\varphi_{\mathrm{Im}}"', "\cong"] \arrow[r, hook, "u_{F_S}"] \arrow[d, hook, "j_{\mathrm{Im}}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(B)}"] & \mathfrak{Y}_S(\mathbf{A}_{\underline{K},S})_{\mathrm{top}} \arrow[u, "\varphi_Y"', "\cong"] \arrow[d, hook, "j_Y"'] \\
X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \arrow[r, two heads, "\overline{f}_{\mathrm{top}}"] \arrow[d, hook, "i_X"'] & \mathrm{Im}\,(f_{\mathrm{top}}) \arrow[r, hook, "u_f"] \arrow[d, hook, "i_{\mathrm{Im}}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(C)}"] & Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \arrow[d, hook, "i_Y"'] \\
\prod\limits_{v\in V} X_v(K_v)_{\mathrm{top}} \arrow[r, two heads, "\prod_v \overline{f}_{v,\mathrm{top}}"] & \prod\limits_{v\in V} \mathrm{Im}\,(f_{v,\mathrm{top}}) \arrow[r, hook] & \prod\limits_{v\in V} Y_v(K_v)_{\mathrm{top}}
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

dans lequel :

— chaque image (colonne du milieu) est munie de la topologie induite par l'espace d'arrivée (à sa droite). Les quatre flèches horizontales du type $\hookrightarrow\!\!\bullet\!\!\to$ sont donc des plongements topologiques (cf. 2.2. (ii)) ;

— les flèches φ_X et φ_Y sont des homéomorphismes par définition des topologies sur $\mathfrak{X}_S(\mathbf{A}_{\underline{K},S})$ et $\mathfrak{Y}_S(\mathbf{A}_{\underline{K},S})$ (cf. 4.1) ;

— φ_{Im} est également un homéomorphisme d'après 2.3 (i), et le carré (A) est (trivialement) cartésien ;

— les deux flèches descendantes du type $\hookrightarrow\!\!\circ\!\!\to$ sont des plongements topologiques ouverts (4.3.2) ;

— puisque j_Y, u_{F_S} et u_f sont des plongements topologiques, j_{Im} en est un ;

— le sous-diagramme formé des deux dernières lignes ne dépend pas de S ni du modèle F_S ;

— en général, i_X, i_{Im} et i_Y ne sont pas des plongements topologiques.

Lorsque S varie, chacun des ensembles de la troisième ligne est réunion filtrante des images des ensembles du dessus, en sorte que les deuxième et troisième lignes donnent naissance au diagramme

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim\limits_{S} \mathfrak{X}_S(\mathbf{A}_{\underline{K},S})_{\mathrm{top}} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\psi_X"', "\cong"] & \varinjlim\limits_{S} \mathrm{Im}\,(F_{S,\mathrm{top}}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\psi_{\mathrm{Im}}"'] & \varinjlim\limits_{S} \mathfrak{Y}_S(\mathbf{A}_{\underline{K},S})_{\mathrm{top}} \arrow[d, "\psi_Y"', "\cong"] \\
X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \arrow[r, two heads, "\overline{f}_{\mathrm{top}}"] & \mathrm{Im}\,(f_{\mathrm{top}}) \arrow[r, hook, "u_f"] & Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

où les flèches ψ_X et ψ_Y sont des homéomorphismes par définition des topologies adéliques, alors que ψ_{Im} est, a priori, seulement une bijection continue.

La difficulté, dans l'étude de l'application adélique f_{top} (troisième ligne), réside en général dans le passage à la limite à partir des propriétés de $F_{S,\mathrm{top}}$ (deuxième ligne). Ces dernières se ramènent à celles de la première ligne : la proposition ci-dessous traite le cas où F_S est lisse.

Proposition 4.2. *Avec les hypothèses et notations de* 4.4, *on suppose que* V_∞ *est* <u>*fini*</u>*, que* $F_S : \mathfrak{X}_S \to \mathfrak{Y}_S$ *est* <u>*lisse*</u> *et que, pour tout* $v \in V$*, le corps valué* K_v *est* <u>*hensélien*</u>*.*

(i) *La surjection* $\overline{F}_{S,\mathrm{top}} : \mathfrak{X}_S(\mathbf{A}_{\underline{K},S})_{\mathrm{top}} \to \mathrm{Im}\,(F_{S,\mathrm{top}})$ *a assez de sections locales, et assez de sections si* $V_\infty = \emptyset$*.*

(ii) *Le plongement* $u_{F_S} : \mathrm{Im}\,(F_{S,\mathrm{top}}) \hookrightarrow \mathfrak{Y}_S(\mathbf{A}_{\underline{K},S})_{\mathrm{top}}$ *est* <u>*localement fermé*</u>*.*

(iii) *Supposons de plus que, pour presque tout* $v \in V$*, l'application* $F_{v,\mathrm{top}} : \mathfrak{X}_S(O'_v)_{\mathrm{top}} \to \mathfrak{Y}_S(O'_v)_{\mathrm{top}}$ *soit* <u>*surjective*</u>*. Alors le plongement* u_{F_S} *est ouvert.*

Démonstration: il suffit d'établir les propriétés correspondantes pour les flèches de la ligne supérieure du diagramme (4.3). On peut de plus supposer que $V_\infty \subset S$ (remarquer que $\mathbf{A}_{\underline{K},S\cup V_\infty} = \mathbf{A}_{\underline{K},S}$).

Dans ces conditions, pour $v \in S$ (et donc $O'_v = K_v$), la proposition 3.5 nous dit que $\mathrm{Im}\,(F_{v,\mathrm{top}})$ est un ouvert de $\mathfrak{Y}_S(O'_v)_{\mathrm{top}}$ et que $\overline{F}_{v,\mathrm{top}}$ admet assez de sections locales ; si de plus $v \in S \smallsetminus V_\infty$, elle a même assez de sections d'après 3.5. (2). D'autre part, pour $v \notin S$, on a $O'_v = O_v$, et la proposition 3.3 indique que $\mathrm{Im}\,(F_{v,\mathrm{top}})$ est ouvert et fermé dans $\mathfrak{Y}_S(O'_v)_{\mathrm{top}}$ et que $\overline{F}_{v,\mathrm{top}}$ admet assez de sections. En vertu du corollaire 2.3 (iii), $\overline{F}_{S,\mathrm{top}} : \mathfrak{X}_S(\mathbf{A}_{\underline{K},S})_{\mathrm{top}} \to \mathrm{Im}\,(F_{S,\mathrm{top}})$ a assez de sections locales, d'où la première partie de l'assertion (i) ; si de plus $V_\infty = \emptyset$, le raffinement 2.3 (ii) indique que cette application a assez de sections. En outre, le lemme 2.2. (iv) montre que $\mathrm{Im}\,(F_{S,\mathrm{top}})$ est localement fermé dans $\prod_{v\in V} \mathfrak{Y}_S(O'_v)_{\mathrm{top}}$, c'est-à-dire l'assertion (ii).

Sous l'hypothèse supplémentaire de (iii), on a $\mathrm{Im}\,(F_{v,\mathrm{top}}) = \mathfrak{Y}_S(O'_v)_{\mathrm{top}}$ pour presque tout v, de sorte que $\prod_{v\in V} \mathrm{Im}\,(F_{v,\mathrm{top}})$ est bien ouvert d'après 2.2. (i). ∎

5 La propriété « presque propre »

5.1 Version locale

Soit (K, v) un corps valué ; on pose $O = O_v$ et l'on considère un morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de O-schémas séparés. Nous noterons PPL (« presque-propreté locale ») la condition suivante sur f :

$$\mathrm{PPL}(O,f) : \qquad \mathrm{Im}\big(\mathfrak{X}(O)\to\mathfrak{Y}(O)\big) \;=\; \mathrm{Im}\big(\mathfrak{X}(K)\to\mathfrak{Y}(K)\big)\;\cap\;\mathfrak{Y}(O)$$

où l'on identifie $\mathfrak{X}(O)$ et $\mathfrak{Y}(O)$ à leurs images respectives dans $\mathfrak{X}(K)$ et $\mathfrak{Y}(K)$.

Remarques 5.1.

(1) La condition (PPL) est trivialement vérifiée si v est archimédienne : dans ce cas, on a $O = K$ par convention.

(2) Un autre cas trivial, un peu plus intéressant, est celui où l'application $\mathfrak{X}(O)\to\mathfrak{Y}(O)$ est surjective.

(3) (PPL) est aussi satisfaite si f est propre ; plus généralement, si $f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ vérifie (PPL) et si $g:\mathfrak{Y}\to\mathfrak{Z}$ est propre, alors $g\circ f:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Z}$ vérifie (PPL). C'est là une conséquence facile du critère valuatif de propreté.

5.2 Version adélique

Soit $(K_v)_{v\in V}$ comme dans 4.2, dont nous reprenons les notations. Considérons un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schémas séparés de présentation finie.

Définition 5.2. *Avec les notations ci-dessus, nous dirons que $f : X \to Y$ est presque propre s'il vérifie la condition suivante :*

$\mathrm{PP}(\mathbf{A}_{\underline{K}}, f)$: *il existe une partie finie S de V et un S-modèle $F_S : \mathfrak{X}_S \to \mathfrak{Y}_S$ de f tel que pour presque tout $v\notin S$ la condition* $\mathrm{PPL}(O_v, F_{S,v})$ *de* 5.1 *soit satisfaite, où $F_{S,v} : \mathfrak{X}_{S,v}\to\mathfrak{Y}_{S,v}$ est le O_v-morphisme induit par F_S.*

Nous dirons en outre que $F_S : \mathfrak{X}_S \to \mathfrak{Y}_S$ est un bon S-modèle de f si la condition $\mathrm{PPL}(O_v, F_{S,v})$ *est vérifiée pour tout $v\notin S$.*

Remarques 5.3.

(1) Si f est presque propre, la condition énoncée est en fait valable pour tout S et tout S-modèle de f. De plus, étant donné un tel modèle F_S, soit S' la réunion de S et de l'ensemble (fini) des $v\notin S$ tels que $\mathrm{PPL}(O_v, F_v)$ ne soit pas satisfaite. Alors le S'-modèle $F_{S'} : \mathfrak{X}_{S'}\to\mathfrak{Y}_{S'}$ déduit de F_S par changement de base est un bon S'-modèle.

(2) Si f est propre, alors f satisfait la propriété (PP). En effet si $F_S : \mathfrak{X}_S\to\mathfrak{Y}_S$ est un S-modèle de f, il existe S' fini contenant S tel que le S'-modèle déduit de F par changement de base soit propre [17, (8.10.5)(xii)] ; en particulier, pour tout $v\notin S'$, le O_v-morphisme $F_v : \mathfrak{X}_v\to\mathfrak{Y}_v$ est propre et vérifie donc (PPL).

(3) On a plus généralement l'analogue de 5.1 (3) : si $f : X\to Y$ vérifie (PP) et si $g : Y\to Z$ est propre, alors $g\circ f : X\to Z$ vérifie (PP).

Nous verrons plus loin des exemples de cette propriété, cf. (5.3).

Proposition 5.4. *Avec les notations de* 5.2, *on suppose que* $f : X \to Y$ *est presque propre, et l'on fixe un bon* S*-modèle* $F_S : \mathfrak{X}_S \to \mathfrak{Y}_S$ *de* f*, pour* $S \subset V$ *fini convenable. On considère le diagramme des images (4.3) associé (voir Section 4.4) Alors :*

(i) *les carrés* (B) *et* (C) *du diagramme sont* *<u>cartésiens</u>;*

(ii) $j_{\mathrm{Im}} : \mathrm{Im}\,(F_{S,\mathrm{top}}) \to \mathrm{Im}\,(f_{\mathrm{top}})$ *est un plongement topologique* *<u>ouvert</u>;*

(iii) *la bijection continue*

$$\psi_{\mathrm{Im}} : \varinjlim_{S' \supset S} \mathrm{Im}\,(F_{S',\mathrm{top}}) \to \mathrm{Im}\,(f_{\mathrm{top}})$$

du diagramme 4.4 (4.4) *est un homéomorphisme.*

Démonstration: (i) notons d'abord que puisque les flèches horizontales sont des plongements topologiques, il revient au même de dire que (B) (resp. (C)) est ensemblistement cartésien ou qu'il l'est topologiquement.

Montrons d'abord que le rectangle $\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{B}\\ \mathrm{C}\end{smallmatrix}\right)$ est cartésien. Composant avec les isomorphismes en haut du diagramme (4.3), il suffit de voir que le diagramme (5.1) de gauche

$$\begin{tikzcd}
\prod_{v\in V} \mathrm{Im}\,(F_{v,\mathrm{top}}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \prod_{v\in V} \mathfrak{Y}_S(O'_v)_{\mathrm{top}} \arrow[d, hook] & \mathrm{Im}\,(F_{v,\mathrm{top}}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathfrak{Y}_S(O'_v)_{\mathrm{top}} \arrow[d, hook] \\
\prod_{v\in V} \mathrm{Im}\,(f_{v,\mathrm{top}}) \arrow[r, hook] & \prod_{v\in V} Y_v(K_v)_{\mathrm{top}} & \mathrm{Im}\,(f_{v,\mathrm{top}}) \arrow[r, hook] & Y_v(K_v)_{\mathrm{top}}
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

est cartésien ; or celui-ci est le produit, indexé par $v \in V$, des diagrammes de droite, qui sont cartésiens par définition d'un bon modèle.

Montrons maintenant que (C) est cartésien si f est presque propre. L'injection $u_f : \mathrm{Im}\,(f_{\mathrm{top}}) \hookrightarrow Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})$ est (au moins ensemblistement) limite inductive filtrante des $u_{F_S} : \mathrm{Im}\,(F_{S,\mathrm{top}}) \hookrightarrow \mathfrak{Y}_S(\mathbf{A}_{\underline{K}}, S)$ lorsque F_S parcourt les bons modèles de f. L'assertion est donc conséquence de la précédente par passage à la limite.

Enfin, puisque le rectangle $\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{B}\\ \mathrm{C}\end{smallmatrix}\right)$ et le carré (C) sont cartésiens, le carré (B) l'est aussi.

Cette dernière propriété implique aussi l'assertion (ii) puisque j_Y est un plongement topologique ouvert. On en déduit enfin (iii) : en effet, $\mathrm{Im}\,(f_{\mathrm{top}})$ est réunion filtrante des images des $\mathrm{Im}\,(F_{S',\mathrm{top}})$, lesquelles sont ouvertes, de sorte que cette réunion est aussi une colimite topologique. ∎

Proposition 5.5. *Soient* $(K_v)_{v\in V}$ *et* $f : X \to Y$ *comme dans* 5.2. *On suppose que* $f : X \to Y$ *est presque propre (5.2). On note* I *l'image de* $f_{\mathrm{top}} : X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$.

(1) *On suppose que pour tout* $v \in V$ *l'image de* $f_v : X(K_v)_{\mathrm{top}} \to Y(K_v)_{\mathrm{top}}$ *est fermée. Alors* I *est fermée.*

(2) *On suppose que* V_∞ *est fini, que* f *est lisse, et que tous les corps valués* K_v *sont henséliens. Alors :*

(i) *La surjection* $\overline{f}_{\mathrm{top}} : X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to I$ *a assez de sections locales. En particulier,* f_{top} *est ouverte sur son image (et donc stricte). Si* $V_\infty = \emptyset$, *alors* $\overline{f}_{\mathrm{top}}$ *a assez de sections.*

(ii) I *est localement fermée dans* $Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$.

(iii) *Soit* $F_S : \mathfrak{X}_S \to \mathfrak{Y}_S$ *un* S*-modèle de* f, *et supposons de plus que, pour presque tout* $v \in V$, *l'application* $F_{v,\mathrm{top}} : \mathfrak{X}_S(O'_v)_{\mathrm{top}} \to \mathfrak{Y}_S(O'_v)_{\mathrm{top}}$ *soit surjective (condition qui ne dépend pas du choix du modèle). Alors* I *est ouverte dans* $Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$.

Démonstration: (1) L'hypothèse sur les images entraîne que, dans le diagramme 4.4 (4.3), le plongement en bas à droite est fermé. D'autre part, comme f est presque propre, le carré (C) est cartésien (proposition 5.4), d'où la conclusion.

(2) Il existe $S \subset V$ fini et un bon S-modèle lisse $F_S : \mathfrak{X}_S \to \mathfrak{Y}_S$ de f. Pour tout S' fini contenant S, on notera $F_{S'} : \mathfrak{X}_{S'} \to \mathfrak{Y}_{S'}$ le bon S'-modèle déduit de F_S par changement de base, et $I_{S'} \subset \mathfrak{Y}_{S'}(\mathbf{A}_{\underline{K},S'})_{\mathrm{top}}$ l'image de $F_{S'}$.

Dans ces conditions, $Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$ est la réunion filtrante, indexée par S', des ouverts $\mathfrak{Y}_{S'}(\mathbf{A}_{\underline{K},S'})_{\mathrm{top}}$. De plus, comme chaque $F_{S'}$ est un bon modèle, la proposition 5.4 nous dit que $I_{S'} = I \cap \mathfrak{Y}_{S'}(\mathbf{A}_{\underline{K},S'})_{\mathrm{top}}$. Les trois assertions résultent donc des assertions correspondantes de la proposition 4.2 appliquée à chaque $F_{S'}$. ■

Corollaire 5.6. *Soient* K, $(K_v)_{v\in V}$ *et* $f : X \to Y$ *comme dans* 5.2. *On note* I *l'image de* $f_{\mathrm{top}} : X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$, *et l'on suppose que :*

— f *est propre et lisse ;*
— V_∞ *est fini ;*
— *tous les corps valués* K_v *sont admissibles* (3.5).

Alors I *est fermée dans* $Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$, *et l'application induite* $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to I$ *admet assez de sections locales.*

Démonstration: Pour tout $v \in V$, l'image de $f_{v,\mathrm{top}} : X(K_v)_{\mathrm{top}} \to Y(K_v)_{\mathrm{top}}$ est fermée d'après 3.6. (2), puisque f est propre et K_v admissible. Par suite I est fermée (5.5. (1)). L'existence d'assez de sections locales résulte de 5.5. (2). ■

5.3 Morphismes presque propres : le critère d'Oesterlé

Un cas intéressant où (PP) est vérifiée a été remarqué par Oesterlé dans le cas affine [23, I.3.6] et raffiné par Conrad [4, Th. 4.5]. De façon précise, leur énoncé est le cas particulier de l'énoncé ci-dessous lorsque le morphisme $X \to Y$ provient d'un corps global K dont les K_v sont les complétés.

Théorème 5.7. *Soient $(K_v)_{v\in V}$ et $f : X \to Y$ comme dans 5.2. On suppose que :*

- *f est universellement ouvert, surjectif, à fibres géométriquement intègres ;*
- *les corps valués K_v sont henséliens ;*
- *pour tout $q \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $v \in V$ [5], le corps K_v est ultramétrique, à corps résiduel fini k_v de cardinal $> q$. (En particulier, V_∞ est fini).*

Alors :

(1) Il existe un sous-ensemble fini S de V et un S-modèle $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de f tel que pour tout $v \in V \smallsetminus S$ l'application induite $\mathfrak{X}(O_v) \to \mathfrak{Y}(O_v)$ soit surjective. (En particulier, f est presque propre.)

(2) Si f est lisse, l'application $f_{\mathrm{top}} : \mathfrak{X}(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to \mathfrak{Y}(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$ est ouverte. Plus précisément, son image I est ouverte dans $\mathfrak{Y}(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$, et l'application induite $\overline{f}_{\mathrm{top}} : \mathfrak{X}(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to I$ admet assez de sections locales, et assez de sections si $V_\infty = \emptyset$.

Nous convenons d'appeler adéliquement surjectif la propriété (1) du théorème. L'ingrédient principal est l'estimée suivante de type « Lang-Weil ».

Lemme 5.8. *Soit A un anneau et soit $F : E \to B$ un A-morphisme entre A-schémas de présentation finie. Soit d un entier ≥ 1.*

(1) Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout corps fini k de cardinal q qui est une A-algèbre et pour tout point $b \in B(k)$ tel que E_b soit de dimension d, on a

$$| \#E_b(k) | \leq C_1 \, q^d.$$

(2) Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout corps fini k de cardinal q qui est une A-algèbre et pour tout point $b \in B(k)$ tel que E_b soit géométriquement irréductible de dimension d, on a

$$| \#E_b(k) - q^d | \leq C_2 \, q^{d-\frac{1}{2}}.$$

(3) Il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout corps fini k de cardinal $q \geq C_3$ qui est une A-algèbre, et pour tout point $b \in B(k)$ tel que E_b soit géométriquement intègre, alors E_b a un k-point lisse.

5. Bien entendu, l'ensemble des « bons » v dépend de q.

Remarque 5.9. (a) Pour l'application au théorème 5.7, on n'a besoin que du cas lisse et séparé qui est traité sur $\mathbb{Z}$ par Conrad [4, Lemma 4.6], toujours dans le cas où le point b est de corps résiduel de cardinal q.

(b) Pour le théorème 5.7 et plus loin (corollaire 6.7), seule la partie (3) de l'énoncé sera utilisée. Un cas particulier important est celui où $F : E \to B$ est un espace homogène sous un B-schéma en groupes G lisse, séparé, de présentation finie, et à fibres géométriquement connexes. De ce point de vue, ce cas particulier est bien plus simple. En effet, d'après Lang [19, Th. 2], pour tout corps fini k qui est une A-algèbre et pour tout point $b \in B(k)$, on a $E_b(k) \neq \emptyset$.

La version ci-dessus est une légère généralisation de celle de Poonen [24, Th. 7.7.1].

Démonstration du lemme 5.8 : si $A = \mathbb{Z}$ et si on se restreint aux points b dont le corps résiduel est de cardinal q, il s'agit exactement du résultat cité. Par inspection de la démonstration, celle-ci se généralise au cas d'un point arbitraire $b \in B(k)$.

Dans le cas général, il existe un sous-anneau A_0 de A qui est une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini et un A_0-morphisme $F_0 : E_0 \to B_0$ entre A_0-schémas de présentation finie tel que $F = F_0 \times_{A_0} A$. Comme F_0 est en particulier un morphisme de $\mathbb{Z}$-schémas de présentation finie, le cas $A = \mathbb{Z}$ s'applique. ∎

Pour la preuve du théorème 5.7, nous aurons aussi besoin du résultat suivant :

Lemme 5.10. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On suppose que Y est réduit et que f est localement de présentation finie, universellement ouvert, à fibres géométriquement réduites. Alors f est plat.*

Démonstration: lorsque Y est localement noethérien cela résulte directement de [17, (15.2.3)]. En général, on peut supposer X et $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affines ; il existe un sous-anneau A_0 de A, de type fini sur $\mathbb{Z}$, tel que f provienne par changement de base d'un morphisme de type fini $f_0 : X_0 \to Y_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$. D'après [25, th. 6.6], on peut choisir A_0 de sorte que f_0 soit universellement ouvert. D'autre part, l'ensemble E des $y \in Y_0$ tel que $f_0^{-1}(y)$ soit géométriquement réduit est constructible dans Y_0 [17, (9.7.7)] et l'hypothèse sur f assure que l'image de Y dans Y_0 est contenue dans E. On en déduit par [17, (8.3.4)] qu'en choisissant A_0 assez grand, on a $E = Y_0$. Il résulte alors du cas noethérien que f_0, et donc f, est plat. ∎

Démonstration du théorème 5.7 : (1) En écrivant $\mathbf{A}_{\underline{K}}$ comme limite inductive des $\mathbf{A}_{\underline{K},S}$, il existe $S_\sharp \subset V$ fini et un $S_\sharp$-modèle $F_\sharp : \mathfrak{X}_\sharp \to \mathfrak{Y}_\sharp$ de $X \to Y$ (avec $\mathfrak{X}_\sharp$ et $\mathfrak{Y}_\sharp$ séparés de présentation finie sur $\mathbf{A}_{\underline{K},S_\sharp}$). En outre, quitte à étendre $S_\sharp$, on peut supposer $F_\sharp$ universellement ouvert d'après [25, th. 6.6], surjectif [17, (8.10.5)], et de plus à fibres géométriquement intègres : pour ce dernier point on observe que pour S fini contenant $S_\sharp$, l'ensemble des points $y \in \mathfrak{Y}_S$ tels que $F_S^{-1}(y)$ soit géométriquement intègre est constructible dans $\mathfrak{Y}_S$ [17, 9.7.7], et l'on conclut en utilisant [17, (8.3.4)] comme dans la preuve de 5.10.

Par application du lemme 5.8.(3), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout corps fini k de cardinal $q > C$ qui est une $\mathbf{A}_{\underline{K},S_\sharp}$-algèbre et pour tout point $y \in \mathfrak{Y}_\sharp(k)$, on a $\mathfrak{X}_{\sharp,y}^{\text{lisse}}(k) \neq \emptyset$, où $\mathfrak{X}_{\sharp,y}^{\text{lisse}}$ désigne le lieu lisse du k-schéma $\mathfrak{X}_{\sharp,y}$. On pose alors

$$S = S_\sharp \cup V_\infty \cup \big\{ v \in V \smallsetminus V_\infty \mid \# k_v \leq C \big\}.$$

C'est un ensemble fini ; notons $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ le S-modèle de f déduit de $F_\sharp$, et vérifions que la propriété (1) est satisfaite. Soient donc $v \in V \smallsetminus S$ et $y \in \mathfrak{Y}(O_v)$. Le point $\overline{y} \in \mathfrak{Y}(k_v)$ déduit de y se relève (puisque $\#(k_v) > C$) en un point $\overline{x} \in \mathfrak{X}(k_v)$, lisse dans sa fibre. Considérons $F_{\text{red}} : \mathfrak{X}_{\text{red}} \to \mathfrak{Y}_{\text{red}}$, restriction de F au-dessus de $\mathfrak{Y}_{\text{red}}$. Alors il résulte de 5.10 que F_{red} est plat, et donc lisse au point $\overline{x}$. Comme $y : \operatorname{Spec}(O_v) \to \mathfrak{Y}$ se factorise par $\mathfrak{Y}_{\text{red}}$, et que O_v est hensélien, on conclut qu'il existe $x : \operatorname{Spec}(O_v) \to \mathfrak{X}_{\text{red}}$ relevant y et prolongeant $\overline{x}$.

(2) est conséquence de (1) et des assertions (i) et (iii) de 5.5. (2). ■

Remarque 5.11. Les conditions sur $\underline{K}$ de 5.7 sont vérifiées lorsque K est un corps global, V l'ensemble de ses places et (K_v) la famille de ses complétés ; c'est le cas considéré dans [23] et dans [4].

6 Le cas des torseurs

6.1 Rappels et conventions

6.1.1 Torseurs. Soient S un schéma et H un S-schéma en groupes. Nous entendrons par <u>H-torseur</u> sur S un faisceau sur S pour la topologie fppf, muni d'une action de H (ou plutôt du faisceau qu'il représente) et qui est un H-torseur pour cette action. Lorsque H est de présentation finie sur S, un tel torseur X est automatiquement un S-espace algébrique de présentation finie [26, 78.11.8, tag 04U1], séparé si H l'est ; nous dirons que X est <u>représentable</u> si c'est un schéma, ce qui est toujours le cas si H est affine sur S, ou encore si S est le spectre d'un corps.

Pour S et H comme ci-dessus, si Y est un S-schéma, un $H \times_S Y$-torseur (représentable) sera aussi appelé, par abus, un « H-torseur (représentable) au-dessus de Y ».

6.1.2 Cas des adèles. Dans la suite du §6, on fixe un ensemble d'indices V et une famille $\underline{K} = (K_v, \mathrm{abs}_v)_{v\in V}$ de corps valués.

Si G est un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma en groupes séparé de présentation finie, Y un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma séparé de présentation finie, et $f : X \to Y$ un G-torseur représentable au-dessus de Y, on se propose d'étudier l'application continue

$$f_{\mathrm{top}} : X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$$

induite par f. Il est immédiat que le groupe topologique $G(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$ opère librement sur $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$, et que les fibres non vides de f_{top} sont les orbites pour cette action. De façon plus précise, f_{top} est un <u>pseudo-torseur topologique</u> sous $G(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$, c'est-à-dire que l'application

$$\begin{array}{ccc} G(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \times_{Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}} X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} & \longrightarrow & X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \times_{Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}} X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \\ (g,x) & \longmapsto & (gx,x) \end{array}$$

est un homéomorphisme ; c'est là une conséquence formelle de la compatibilité aux produits fibrés.

6.2 Torseurs presque propres : une condition suffisante

Soit G un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma en groupes séparé de présentation finie. Lorsque nous parlerons d'un S-modèle $\mathfrak{G}$ de G, pour une partie finie S de V, nous supposerons toujours $\mathfrak{G}$ muni d'une structure de $\mathbf{A}_{\underline{K},S}$-schéma en groupes induisant celle de G. Nous nous intéressons ici à la condition suivante sur G :

$\mathrm{NT}(G)$: il existe une partie finie S de V et un S-modèle $\mathfrak{G}$ de G tels que, pour presque tout $v \in V \smallsetminus S$, l'application naturelle

$$\rho(\mathfrak{G}, v) : \qquad \mathrm{H}^1(O_v, \mathfrak{G}) \to \mathrm{H}^1(K_v, \mathfrak{G})$$

ait un noyau trivial.

Noter que la condition en question est alors satisfaite par <u>tout</u> modèle de G.

Proposition 6.1. *Soit G un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma en groupes séparé de présentation finie, Y un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma séparé de présentation finie et $f : X \to Y$ un G-torseur représentable. On suppose que* NT*(G) est vérifiée. Alors f est presque propre.*

Démonstration: on peut choisir un S-modèle $\mathfrak{G}$ de G tel que l'application $\rho(\mathfrak{G}, v)$ ait un noyau trivial pour <u>tout</u> $v \notin S$, et que f admette un S-modèle $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ qui soit un $\mathfrak{G}$-torseur en vertu de [7, VI_B.10.16].

Fixons $v \notin S$ et notons $F_{v,\mathrm{top}} : \mathfrak{X}(O_v) \to \mathfrak{Y}(O_v)$ l'application induite par F. Soit $y \in \mathfrak{Y}(O_v)$. On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Im}(F_{v,\mathrm{top}}) &\Leftrightarrow \text{ le } \mathfrak{G}_v\text{-torseur } y^*\mathfrak{X} \text{ sur Spec } (O_v) \text{ est trivial} \\ &\Leftrightarrow \text{ le } \mathfrak{G}_{K_v}\text{-torseur } y^*_{K_v}\mathfrak{X} \text{ sur Spec } (K_v) \text{ est trivial} \\ &\Leftrightarrow y_{K_v} \in \mathrm{Im}\,(\mathfrak{X}(K_v) \to \mathfrak{Y}(K_v)) \end{aligned}$$

où la seconde équivalence résulte de l'hypothèse sur $\rho(\mathfrak{G}, v)$. Le lemme en résulte. ∎

Remarque 6.2. La condition $\mathrm{NT}(G)$ est satisfaite si G est propre sur S. On retrouve ainsi que f est presque propre dans ce cas (remarque 5.3 (2)).

La proposition 5.5 a la conséquence suivante.

Corollaire 6.3. *Sous les hypothèses de 6.1 (incluant* $\mathrm{NT}(G)$*), on suppose de plus que G est lisse et que tous les corps valués K_v sont henséliens. On note I l'image de $f_{\mathrm{top}} : X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$. Alors :*

(1) *I est fermé dans $Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$.*

(2) *Si de plus V_∞ est fini, l'application induite $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to I$ est une $G(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$-fibration principale, triviale si $V_\infty = \emptyset$.*

Démonstration: La proposition 6.1 montre que f est presque propre.

(1) Comme G est lisse, f est lisse et les applications $X(K_v) \to Y(K_v)$ sont ouvertes (prop. 3.5) et en particulier d'image I_v ouverte. Pour chaque v, le complémentaire de I_v est une réunion d'images de torseurs sur Y_{K_v} sous des formes tordues de G, donc ce complémentaire est ouvert (l'argument est détaillé dans [12, prop. 3.4.1]). Ainsi I_v est ouvert et fermé pour tout $v \in V$. La proposition 5.5 (1) montre que l'image de f_{top} est fermée.

(2) La proposition 5.5 (2) (i) montre que l'application induite $X_{\mathrm{top}} \to I$ a assez de sections locales, c'est donc une $G(\mathbf{A}_{\underline{K}})$-fibration principale. Si $V_\infty = \emptyset$, elle a même assez de sections, donc est triviale. ∎

6.3 Quelques cas où la propriété d'injectivité est connue

Soient A un anneau intègre, F son corps de fractions. Soit H un A-schéma en groupes plat de présentation finie. On sait que l'application $\mathrm{H}^1(A, H) \to \mathrm{H}^1(F, H)$ est injective dans les cas suivants :

(1) H est propre sur A et A est un anneau de Prüfer (ses anneaux locaux sont des anneaux de valuation) ;

(2) H est fini sur A et A est normal (dans ce cas et dans le précédent, on a même $X(A) = X(F)$ pour tout H-torseur X sur $\mathrm{Spec}(A)$) ;

(3) A est semi-local régulier et H est de type multiplicatif [3, th. 4.1] ;

(4) A est un anneau de valuation et H est réductif (Bruhat-Tits pour le cas d'un anneau de valuation discrète complet, voir [13, Th. I.1.2.2] ; voir [22] et [18, Theorem 1.3] pour le cas général).

(5) $A = k[[t]]$, où k est un corps, H est lisse et provient de k [11, th. 5.5].

On peut attraper d'autres cas via le dévissage facile suivant.

Lemme 6.4. *Soient A un anneau intègre, F son corps de fractions. Soit $1 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 1$ une suite exacte de A-schémas en groupes. On suppose que les deux applications $\mathrm{H}^1(A, G_1) \to \mathrm{H}^1(F, G_1)$ et $\mathrm{H}^1(A, G_3) \to \mathrm{H}^1(F, G_3)$ ont un noyau trivial. Alors on a aussi*

$$\ker\big(\mathrm{H}^1(A, G_2) \to \mathrm{H}^1(F, G_2)\big) = 1$$

dans les deux cas suivants :

(1) *l'application naturelle $G_3(A) \to G_3(F)$ est surjective ;*

(2) $\mathrm{H}^1(A, G_1) = 1$.

Démonstration: la suite de l'énoncé donne lieu au diagramme commutatif exact d'ensembles pointés [14, III.3.3]

$$\begin{array}{ccccccc}
G_3(A) & \xrightarrow{\varphi_A} & \mathrm{H}^1(A, G_1) & \xrightarrow{\alpha_A} & \mathrm{H}^1(A, G_2) & \xrightarrow{\beta_A} & \mathrm{H}^1(A, G_3) \\
\downarrow & & {\scriptstyle a_{G_1}}\downarrow & & {\scriptstyle a_{G_2}}\downarrow & & {\scriptstyle a_{G_3}}\downarrow \\
G_3(F) & \xrightarrow{\varphi_F} & \mathrm{H}^1(F, G_1) & \xrightarrow{\alpha_F} & \mathrm{H}^1(F, G_2) & \xrightarrow{\beta_K} & \mathrm{H}^1(F, G_3).
\end{array}$$

Le cas (2) est alors immédiat et laissé au lecteur. Dans le cas (1), on part d'une classe $\gamma_2 \in \ker a_{G_2}$. Comme $\ker a_{G_3} = 1$ on voit qu'il existe $\gamma_1 \in \mathrm{H}^1(A, G_1)$ s'appliquant sur γ_2 et telle que $\gamma_{1,F} := a_{G_1}(\gamma_1)$ soit dans le noyau de α_F.

Le groupe $G_3(A)$ agit à droite sur $\mathrm{H}^1(A, G_1)$ et les fibres de α_A coïncident avec les orbites pour cette action [14, III.3.3.3]. Il en est de même pour $G_3(F)$ et α_F. Ainsi il existe $g_{3,F} \in G_3(F)$ tel que $\gamma_{1,F} \cdot g_{3,F} = 1 \in \mathrm{H}^1(F, G_1)$. Vu l'hypothèse (1), $g_{3,F}$ se relève en $g_3 \in G_3(A)$ et l'on a dans $\mathrm{H}^1(F, G_1)$ l'égalité

$$1 = \gamma_{1,F} \cdot g_{3,F} = (\gamma_1 \cdot g_3)_F$$

d'où $\gamma_1 \cdot g_3 \in \ker a_{G_1} = 1$. En conclusion, $\gamma_2 = \alpha_A(\gamma_1) = \alpha_A(\gamma_1 \cdot g_3) = 1$. ∎

Par applications successives de 6.4 et des critères énoncés juste avant, on en déduit par exemple :

Corollaire 6.5. *On suppose que A est un anneau de valuation hensélien, de corps résiduel κ. Soit G un A-schéma en groupes de présentation finie admettant une suite de composition*

$$G_1 \lhd G_2 \lhd G$$

dans laquelle :

(i) G_1 *est lisse et* $\mathrm{H}^1(\kappa, G_{1,\kappa}) = 1$ *;*

(ii) G_2/G_1 *est réductif ;*

(iii) G/G_2 *est propre sur* $\mathrm{Spec}(A)$.

Alors l'application naturelle $\mathrm{H}^1(A, G) \to \mathrm{H}^1(F, G)$ *est à noyau trivial.*

Démonstration : (i) entraîne que $\mathrm{H}^1(A, G_1) = 1$. On considère la suite exacte $1 \to G_1 \to G_2 \to G_2/G_1 \to 1$. Si $G_1 = G_2$, on a $\mathrm{H}^1(A, G_2) = 1$. Si G_2/G_1 est réductif, alors $\mathrm{H}^1(A, G_2/G_1) \to \mathrm{H}^1(F, G_2/G_1)$ est à noyau trivial d'après le cas (4) ci-dessus ; il suit par dévissage que $\mathrm{H}^1(A, G_2) \to \mathrm{H}^1(F, G_2)$ est à noyau trivial. Ainsi dans tous les cas $\mathrm{H}^1(A, G_2) \to \mathrm{H}^1(F, G_2)$ est à noyau trivial. Comme G/G_2 est supposé propre, on a $(G/G_2)(A) = (G/G_2)(F)$ en vertu du critère valuatif de propreté. Le lemme 6.4. (2) permet de conclure que $\mathrm{H}^1(A, G) \to \mathrm{H}^1(F, G)$ est à noyau trivial. ∎

6.4 Applications aux torseurs adéliques

On suppose dans cette section que tous les K_v sont hensćliens, et que V_∞ est fini.

Corollaire 6.6. *Soit G un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma en groupes séparé lisse de présentation finie. Soient Y un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma séparé de présentation finie et $f : X \to Y$ un G-torseur représentable. On note I l'image de $f_{\mathrm{top}} : X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$.*

On suppose qu'il existe un S-modèle lisse $\mathfrak{G}$ de G qui admet une suite de composition

$$\mathfrak{G}_1 \lhd \mathfrak{G}_2 \lhd \mathfrak{G}$$

dans laquelle $\mathfrak{G}_1$ est affine lisse à fibres unipotentes déployées, $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_1$ est réductif et $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_2$ est propre.

(1) *I est fermé dans $Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$.*

(2) *L'application induite $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to I$ est une $G(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$-fibration principale.*

Démonstration : Le corollaire 6.5 garantit que la propriété $\mathrm{NT}(G)$ vaut. Ainsi ce corollaire est une conséquence du corollaire 6.3. ∎

Rappelons qu'un corps k est dit pseudo-algébriquement clos si toute k-variété géométriquement intègre admet un point rationnel. C'est le cas, entre autres, des corps séparablement clos et des extensions algébriques infinies d'un corps fini.

Corollaire 6.7. *Soit* $\underline{K} = (K_v)_{v\in V}$ *comme en* 4.2. *On suppose que :*

— *les corps valués* K_v *sont henséliens ;*

— *pour chaque* $v \in V$ *ultramétrique, le corps résiduel* k_v *est fini ou pseudo-algébriquement clos.*

Soit G *un* $\mathbf{A}_{\underline{K}}$*-schéma en groupes séparé lisse de présentation finie, à fibres connexes. Soient* Y *un* $\mathbf{A}_{\underline{K}}$*-schéma séparé de présentation finie et* $f : X \to Y$ *un* G*-torseur. Soit* $I \subset Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})$ *l'image de* f_{top}. *Alors :*

(1) I *est fermé dans* $Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$.

(2) *Si de plus* V_∞ *est fini, l'application induite* $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}} \to I$ *est une* $G(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\mathrm{top}}$*-fibration principale, triviale si* $V_\infty = \emptyset$.

Démonstration: Il suffit de voir que la condition $\mathrm{NT}(G)$ est vérifiée. On peut choisir un S-modèle $\mathfrak{G}$ de présentation finie de G tel que f admette un S-modèle $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ qui soit un $\mathfrak{G}$-torseur en vertu de [7, VI_B.10.3 et 10.16]. Quitte à agrandir S, on peut supposer que $\mathfrak{G}$ est séparé et lisse [17, 8.10.5.(ii) et 17.7.8.(2)] et l'argument de la preuve du théorème 5.7 permet de supposer $\mathfrak{G}$ à fibres connexes.

Soit $v \in V \smallsetminus (S \cup V_\infty)$. On a une bijection $\mathrm{H}^1(O_v, \mathfrak{G}) \to \mathrm{H}^1(k_v, \mathfrak{G})$ en vertu de [7, XXIV.8.1]. Nous allons montrer que $\mathrm{H}^1(k_v, \mathfrak{G}) = 1$ et partant que $\mathrm{H}^1(O_v, \mathfrak{G}) = 1$. Puisque $\mathfrak{G}_{k_v}$ est lisse et connexe, il s'agit du théorème de Lang si k_v est un corps fini [19, Th. 2] ; d'autre part cela entraîne que tout $\mathfrak{G}_{k_v}$-torseur est géométriquement intègre, donc l'assertion est triviale si k_v est pseudo-algébriquement clos.

Le critère $\mathrm{NT}(G)$ est donc vérifié et le corollaire 6.3 s'applique. ∎

6.5 Le cas de caractéristique nulle

On fixe un corps K de caractéristique nulle et une famille non vide $\underline{K} = (K_v, \mathrm{abs}_v)_{v\in V}$ d'extensions valuées de K. On suppose en outre que :

— V_∞ est fini ;

— pour tout $v \in V$, K_v est hensélien ;

— pour tout $f \in K^\times$, on a $|f|_v = 1$ pour presque tout $v \in V$.

En particulier, $K \subset \mathbf{A}_{\underline{K}}$ d'après la troisième condition.

Un cas bien connu est celui d'un corps de nombres muni de la famille de ses complétés ; un autre est celui où K est le corps des fonctions rationnelles d'un $\mathbb{Q}$-schéma intègre, noethérien et normal Z, V la famille des valuations divisorielles de Z, et K_v le complété (ou le hensélisé) de K en v.

Théorème 6.8. *Sous les hypothèses précédentes, soient G un K-schéma en groupes de type fini, Y un $\mathbf{A}_{\underline{K}}$-schéma séparé de présentation finie et $f : X \to Y$ un G-torseur. On note I l'image de $f_{\text{top}} : X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}} \to Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$. Alors :*

(1) *I est fermé dans $Y(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$.*

(2) *L'application induite $X(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}} \to I$ est une $G(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$-fibration principale.*

Démonstration : Puisque K est de caractéristique nulle, il existe une suite de composition $G_1 \lhd G_2 \lhd G$ où G_1 est unipotent déployé, G_2/G_1 est réductif, et G/G_2 est propre sur K. D'après [17, § 8], il existe un sous-anneau A_0 de K, de type fini sur $\mathbb{Z}$, tel que G provienne par changement de base d'un A_0-schéma en groupes lisse admettant une suite de composition (à composantes lisses) avec les mêmes propriétés. Comme $A_0 \subset \mathbf{A}_{\underline{K},S}$ pour $S \subset V$ fini assez grand, on en déduit un S-modèle $\mathfrak{G}$ de G vérifiant la condition du corollaire 6.6 ; ce dernier donne le résultat. ■

6.6 Exemple d'une image non fermée et d'une application non stricte

Soit K le corps global $\mathbb{F}_p(t)$, muni de la famille de ses complétés $(K_v)_{v\in V}$, où V s'identifie à l'ensemble des points fermés de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$. On va donner un exemple de H-torseur $f : X \to Y$ tel que f_{top} n'est pas stricte et telle que l'image I de f_{top} n'est pas fermée. Cet exemple est un avatar global d'un exemple local [12, §7.1].

On note $Y_0 = \mathbb{A}^1_K$. Le groupe $G_0 = \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ agit sur Y_0 par $(x, y).z = x^p + y^p z$. On note H_0 le stabilisateur de $t \in \mathbb{A}^1_K(K)$ pour cette action. Le morphisme d'orbite en t donne un isomorphisme de G_0-variétés $G_0/H_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1_K = Y_0$. On pose $X = G_0 \times_K \mathbf{A}_{\underline{K}}$, $Y = Y_0 \times_K \mathbf{A}_{\underline{K}}$, $H = H_0 \times_K \mathbf{A}_{\underline{K}}$, On note $f : X \to G/H \xrightarrow{\sim} Y$ le morphisme quotient.

Notant $\mathbf{I}_{\underline{K}} = \mathbb{G}_m(\mathbf{A}_{\underline{K}})_{\text{top}}$ le groupe topologique des idèles de K, l'image I de $f_{\text{top}} : \mathbf{A}_{\underline{K}} \rtimes \mathbf{I}_{\underline{K}} \to \mathbf{A}_{\underline{K}}$ est $\{x^p + y^p t \mid x \in \mathbf{A}_{\underline{K}}, y \in \mathbf{I}_{\underline{K}}\}$. Alors 0 n'appartient pas à I mais est adhérent à I donc I n'est pas fermée.

Observons que f_{top} est injective (de façon équivalente, H_{top} est trivial) : en effet, pour tout $v \in V$, t n'est pas une puissance p-ième dans K_v. Supposons, par l'absurde, que $f_{\text{top}} : \mathbf{A}_{\underline{K}} \rtimes \mathbf{I}_{\underline{K}} \to \mathbf{A}_{\underline{K}}$ soit stricte. Comme elle est injective, c'est donc un plongement topologique. En particulier, le composé $\mathbf{I}_{\underline{K}} \hookrightarrow \mathbf{A}_{\underline{K}} \rtimes \mathbf{I}_{\underline{K}} \xrightarrow{f_{\text{top}}} \mathbf{A}_{\underline{K}}$, $y \to y^p t$ est un plongement topologique, ce qui est absurde. Ainsi f_{top} n'est pas stricte et n'induit pas une H_{top}-fibration topologique.

Enfin, I est localement fermé dans $\mathbf{A}_{\underline{K}}$: il suffit de le vérifier au voisinage de t. On considère l'ouvert $\Omega = t + \mathbf{A}_{\underline{K},\emptyset} = t + \prod_{v\in V} O_v$ de $\mathbf{A}_{\underline{K}}$. Vu que $t+O_v \cap f_v(K_v \rtimes K_v^{\times})$ est fermé dans $t+O_v$ pour tout $v \in V$ le lemme 2.2.(iii) indique que $I \cap \Omega$ est fermé dans Ω.

7 Appendice : ultraparacompacité

On rappelle qu'un espace topologique X est <u>ultraparacompact</u> s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X admet un raffinement ouvert $(V_j)_{j\in J}$ tel que $X = \coprod_{j\in J} V_j$.

Proposition 7.1. *Soit $(X_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ un système projectif d'ensembles, dont l'ensemble d'indices $\mathfrak{I}$ est <u>totalement ordonné</u>. Notons X l'espace topologique $\varprojlim_{i\in\mathfrak{I}} X_i$, chaque X_i étant muni de la topologie discrète. Alors tout sous-espace de X est ultraparacompact.*

Démonstration : quitte à remplacer $\mathfrak{I}$ par un sous-ensemble cofinal, nous pouvons le supposer bien ordonné. Pour $i \in \mathfrak{I}$, notons $X \xrightarrow{p_i} X_i$ l'application naturelle. L'ensemble des $p_i^{-1}(b)$, pour $i \in \mathfrak{I}$ et $b \in X_i$, est une base d'ouverts de X, qu'il est commode de voir comme des « boules » dont l'ensemble des rayons est $\mathfrak{I}^\circ$ (l'ensemble totalement ordonné opposé à $\mathfrak{I}$) : pour $x \in X$, nous poserons donc $\mathscr{B}(x,i) := p_i^{-1}(p_i(x))$. Pour $i \leq j$ dans $\mathfrak{I}$ et x, y dans X, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(x,i)\cap\mathscr{B}(y,j)\neq\emptyset &\Leftrightarrow y\in\mathscr{B}(x,i)\\ &\Leftrightarrow \mathscr{B}(y,j)\subset\mathscr{B}(x,i) \quad\Leftrightarrow\quad \mathscr{B}(y,i)=\mathscr{B}(x,i).\end{aligned}$$

Pour établir la proposition, il est facile de voir [27, prop. 7] qu'il suffit de montrer que tout ouvert de X est ultraparacompact. Soit donc $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille d'ouverts de X, de réunion U. Nous allons construire une partition de U par des boules dont chacune est contenue dans un U_λ, ce qui implique le résultat.

Pour chaque $x \in U$, il existe un plus petit indice $i \in \mathfrak{I}$ tel que $\mathscr{B}(x,i)$ soit contenu dans l'un des U_λ : notons-le $r(x)$ et posons $V(x) := \mathscr{B}(x, r(x))$. Ainsi $V(x)$ est la plus grande boule contenant x et contenue dans un U_λ. Il est clair que l'ensemble des $V(x)$ recouvre U et raffine (U_λ) ; d'autre part, si $V(x) \cap V(y) \neq \emptyset$, les équivalences énoncées plus haut (et la définition de $r(x)$) impliquent immédiatement que $V(x) = V(y)$, de sorte que l'on a bien une partition de U. ■

Corollaire 7.2. *Soit A un anneau local topologique séparé admettant une base $\mathfrak{J}$ de voisinages de 0 formée d'idéaux, et totalement ordonnée par inclusion. Soit $\mathfrak{X}$ un A-schéma localement de type fini. Alors tout sous-espace de $\mathfrak{X}(A)_{\mathrm{top}}$ est ultraparacompact.*

Démonstration: cela résulte de 7.1 et de la description donnée en 3.3 de $\mathfrak{X}(A)_{\mathrm{top}}$ comme sous-espace de $\varprojlim_{J\in\mathfrak{J}} \mathfrak{X}(A/J)$. ∎

Remarque 7.3. La condition de l'énoncé est satisfaite notamment si A est un anneau de valuation (muni de la topologie associée), ou encore si A est un anneau local muni de la topologie I-adique, où $I \subset A$ est un idéal tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n = \{0\}$.

Proposition 7.4. *Soit (K, v) un corps valué ultramétrique. Soit X un K-schéma séparé de type fini. Alors tout sous-espace de $X(K)_{\mathrm{top}}$ est ultraparacompact.*

Démonstration: On note A l'anneau de v et Γ son groupe. Tout d'abord, l'espace topologique $X(K)_{\mathrm{top}}$ est séparé. Suivant [17, (8.8.2)(ii) et (8.10.5)(v)], il existe $f \in A$ non nul et un A_f-schéma séparé de type fini $\mathfrak{X}$ tel que $\mathfrak{X} \times_{A_f} K = X$. L'application du théorème de compactification de Nagata [5, thm. 4.1] au morphisme $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spec}(A_f) \to \mathrm{Spec}(A)$ montre qu'il existe une A-immersion ouverte $\phi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^c$ où $\mathfrak{X}^c$ est un A-schéma propre. En particulier on a une immersion ouverte $\phi_K : X \to \mathfrak{X}^c_K$. Alors $X(K)$ s'identifie à un ouvert de $\mathfrak{X}^c_K(K) = \mathfrak{X}^c(K)$ et ce dernier est homéomorphe à $\mathfrak{X}^c(A)$ en vertu de 3.4 (2) et de la propreté de $\mathfrak{X}^c$; on peut donc conclure par le corollaire 7.2. ∎

Remarque 7.5. Pour la preuve de 7.4, on peut se passer du théorème de Nagata si l'on sait *a priori* qu'il existe une immersion de X dans la fibre générique d'un A-schéma propre ; c'est le cas notamment si X est quasi-projectif sur K.

Références

[1] B. Bhatt, *Algebraization and Tannaka duality*, Camb. J. Math. **4** (2016), 403–461.

[2] N. Bourbaki, "Topologie générale, chapitres 1 à 4", Springer, 2007.

[3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Principal homogeneous spaces under flasque tori : Applications*, J. Algebra **106** (1987), 148–205.

[4] B. Conrad, *Weil and Grothendieck Approaches to Adelic Points*, L'Ens. Math. (2) **58** (2012), 61–97.

[5] B. Conrad, *Deligne's notes on Nagata compactifications*, J. Ramanujan Math. Soc. **22** (2007), 205–257.

[6] M. Demazure et P. Gabriel, "Groupes algébriques", Masson, 1970.

[7] M. Demazure et A. Grothendieck, "Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964, Schémas en groupes", Documents mathématiques vol. 7 et 8, Société mathématique de France, 2011.

[8] J. Dugundji, "Topology", Allyn and Bacon, 1966.

[9] O. Endler, "Valuation Theory", Universitext, Springer, 1972.

[10] A.J. Engler et A. Prestel, "Valued Fields", Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2005.

[11] M. Florence et P. Gille, *Residues on affine Grassmannians*, J. Reine Angew. Math. **776** (2021), 119–150.

[12] O. Gabber, P. Gille et L. Moret-Bailly, *Fibrés principaux sur les corps valués henséliens*, Algebr. Geom. **1** (2014), 573–612.

[13] P. Gille, *R-équivalence et torseurs sur la droite affine*, thèse de doctorat, Orsay (1994), http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/gille/divers.html.

[14] J. Giraud, "Cohomologie non abélienne", Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **179**, Springer, 1971.

[15] M.J. Greenberg, *Rational points in Henselian discrete valuation rings*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **31** (1966), 59–64.

[16] A. Grothendieck et J.A. Dieudonné, "Éléments de géométrie algébrique I", Grundlehren der mathematischen Wissenschaften vol. 166, Springer, 1971.

[17] A. Grothendieck et J.A. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique IV.2, IV.3, et IV.4*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **24**, **28** (1965) et **32** (1967).

[18] N. Guo, *The Grothendieck-Serre conjecture over valuation rings*, preprint (2020), <https ://arxiv.org/abs/2008.02767> (31/05/2022).

[19] S. Lang, *Algebraic groups over finite fields*, Amer. J. Math. **78** (1956), 555–563.

[20] B. Margaux, *Passage to the limit in non-abelian Čech cohomology*, J. Lie Theory **17** (2007), 591–596.

[21] L. Moret-Bailly, *An extension of Greenberg's theorem to general valuation rings*, Manuscripta Math. **139** (2012) n° 1, 153–166.

[22] Y.A. Nisnevich, *Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **299** (1984), 5–8.

[23] J. Oesterlé, *Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique* $p > 0$, Invent. Math. **78** (1984), 13–88.

[24] B. Poonen, "Rational points on varieties", Graduate Studies in Mathematics vol. 186, American Mathematical Society, 2017.

[25] D. Rydh, *Submersions and effective descent of étale morphisms*, Bull. Soc. Math. France **138** (2010), 181-230.

[26] The Stacks project authors, *The Stacks Project*, `https://stacks.math.columbia.edu`.

[27] J. Van Name, *Ultraparacompactness and Ultranormality*, preprint (2013), `https://arxiv.org/abs/1306.6086`.

[28] A. Weil, "Adeles and algebraic groups", Progress in Mathematics vol. 23, Birkhäuser, 1982.

P. Gille :
C.N.R.S., Institut Camille Jordan - Université Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex (France).

L. Moret-Bailly :
IRMAR, Université de Rennes, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France) ;
Centre Henri Lebesgue, programme ANR-11-LABX-0020-0.

Les deux auteurs bénéficient du soutien du projet Geolie, ANR-15-CE 40-0012 (Agence Nationale de la Recherche, France).