Problèmes de Skolem sur les champs algébriques

Laurent MORET-BAILLY[(*)]

ABSTRACT. We extend Rumely's local-global principle (as refined by Cantor, Roquette, and the author, i.e. with local splitting conditions) to the case of algebraic stacks, in Artin's sense, over rings of (S-)integers of global fields. The non-geometrically connected case is also taken into account, as well as (in some instances) the case where local conditions are imposed at all places.

2000 Mathematics Subject Classification :
11G35, 14G25 (Primary); 11G25, 12J10, 14A20, 14G20 (Secondary)
Key words and phrases:
global field, Skolem problem, algebraic stack

0. Introduction et énoncé des résultats.

0.1. L'objet principal de cet article est de généraliser au cas des champs algébriques les résultats de [MB 2] sur l'existence de solutions en entiers algébriques de certains problèmes diophantiens ; accessoirement, nous y apportons quelques améliorations, même dans le cadre originel des schémas.

Les champs algébriques s'entendent ici au sens d'Artin [A] ; notre référence générale à ce sujet sera [L-MB], et les principales notions seront passées en revue au § 1.

0.2. *L'anneau de base*. Dans toute la suite, R désigne un anneau de Dedekind qui est :

- soit un localisé de l'anneau des entiers d'un corps de nombres (« cas arithmétique ») ;

- soit un localisé de l'anneau d'une courbe affine, lisse et connexe sur un corps k, extension algébrique d'un corps fini (« cas géométrique »).

(*) IRMAR (UMR 6625 du CNRS),
Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex
Membre du réseau TMR « Arithmetic Algebraic Geometry » (contrat ERB FMRX 960006)
moret@univ-rennes1.fr http://www.maths.univ-rennes1.fr/~moret/

On note K le corps des fractions de R, et l'on pose $B = \mathrm{Spec}(R)$. On note $B^{(1)}$ l'ensemble des points de codimension 1 de B, c'est-à-dire des idéaux premiers non nuls de R (qui sont les idéaux maximaux, sauf si $R = K$). On identifie $B^{(1)}$ comme d'habitude à l'ensemble des places de K correspondantes. Pour toute place v de K (resp. tout $v \in B^{(1)}$) on désigne par K_v (resp. R_v) le complété de K (resp. R) en v.

On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, et l'on note $\overline{R}$ la fermeture intégrale de R dans $\overline{K}$.

0.3. *Données locales sur la base.* On fixe de plus :

(a) un ensemble fini Σ de places de K (archimédiennes ou non), supposé *disjoint* de $B^{(1)}$;

(b) pour chaque $v \in \Sigma$, une extension algébrique L_v de K_v. On suppose que L_v est une extension galoisienne de K_v , *ou bien* une clôture algébrique de K_v (notée $\overline{K}_v$).

Pour $v \in \Sigma$, une extension algébrique K' de K sera dite L_v-*décomposée* si la clôture normale de K' sur K est une sous-extension de L_v (condition automatique si $L_v = \overline{K}_v$). Il revient au même de dire que tout K-plongement de K' dans une clôture algébrique de L_v se factorise par L_v , ou encore, si $[K':K] < +\infty$, que pour toute place w de K' au-dessus de v, l'extension complétée K'_w de K_v est (isomorphe à) une sous-extension de L_v.

On notera $\mathbb{L}$ la K-algèbre topologique produit des L_v ; la donnée de $\mathbb{L}$ équivaut à celle de Σ et des L_v. On dira qu'une extension algébrique K' de K est $\mathbb{L}$-*décomposée* si elle est L_v-décomposée pour tout $v \in \Sigma$. Si $[K':K] < +\infty$, il revient au même de dire que la $\mathbb{L}$-algèbre $\mathbb{L} \otimes_K K'$ est isomorphe à $\mathbb{L}^{[K':K]}$. Il existe une plus grande sous-extension de $\overline{K}$ qui est $\mathbb{L}$-décomposée ; nous noterons $K^{\mathbb{L}}$ cette extension, et $R^{\mathbb{L}}$ la fermeture intégrale de R dans $K^{\mathbb{L}}$.

Par exemple, si $R = \mathbb{Z}$, $\Sigma = \{\infty\}$ (la place archimédienne), et $L_\infty = \mathbb{R}$, alors $R^{\mathbb{L}}$ est l'anneau des entiers algébriques totalement réels.

0.4. *L'objet global.* On se donne un B-champ algébrique $\mathcal{X}$. On note $f : \mathcal{X} \to B$ le 1-morphisme structural, et l'on suppose qu'il vérifie les conditions suivantes (qui ne dépendent pas de $\mathbb{L}$) :

(a) f est surjectif, plat et de type fini ;

(b) pour toute extension finie K' de K, si l'on désigne par B' le normalisé de B dans K', alors chaque composante irréductible de $\mathcal{X}_{B'}$ s'envoie *surjectivement* sur B'.

On observera que, compte tenu de (b), la surjectivité de f dans (a) revient simplement à dire que $\mathcal{X}$ est non vide. De plus la platitude est automatique si $\mathcal{X}$ est réduit (ce que, vu nos besoins, on pourra toujours supposer), car (b) implique que la fibre générique $\mathcal{X}_K$ de f est dense dans $\mathcal{X}$.

Signalons ici une déviation par rapport aux notations de [L-MB] : si $T \to S$ est un morphisme de schémas et $\mathcal{Y}$ un S-champ algébrique, nous noterons $\mathcal{Y}(T)$ (plutôt que $\mathcal{Y}_T$) la catégorie fibre de $\mathcal{Y}$ en T, la notation $\mathcal{Y}_T$ désignant le T-champ algébrique déduit de $\mathcal{Y}$ par le changement de base $T \to S$. Bien entendu on a toujours une équivalence de catégories canonique entre $\mathcal{Y}(T)$ et $\mathcal{Y}_T(T)$.

Revenant à notre champ $\mathcal{X}$, on se pose le problème de l'existence d'objets de $\mathcal{X}(R^{\mathbb{L}})$ vérifiant de plus certaines conditions locales précisées ci-dessous (0.5) ; remarquons dès à présent que puisque f est de présentation finie, la catégorie $\mathcal{X}(R^{\mathbb{L}})$ est limite inductive des $\mathcal{X}(R')$ où R' parcourt l'ensemble des sous-R-algèbres de $R^{\mathbb{L}}$ qui sont de type fini (i.e. finies) sur R. Cette propriété sera utilisée sans commentaire dans la suite, ainsi que l'analogue pour $\mathcal{X}(K^{\mathbb{L}})$.

Il sera en général inoffensif de supposer $\mathcal{X}$ réduit et *irréductible*, la propriété (b) ci-dessus, par exemple, se vérifiant composante par composante. Il est immédiat que, dans ce cas, (b) est *nécessaire* pour l'existence d'un objet de $\mathcal{X}(\overline{R})$, et *a fortiori* de $\mathcal{X}(R^{\mathbb{L}})$. De plus, il suffit de vérifier (b) pour une extension K' telle que toutes les composantes de $\mathcal{X}_{K'}$ soient géométriquement irréductibles sur K' (i.e. pour un corps de rationalité des composantes géométriques de $\mathcal{X}_K$). En particulier si $\mathcal{X}_K$ est déjà géométriquement irréductible sur K, la condition (b) revient simplement à dire que f est surjectif ; lorsque $\mathcal{X}$ est un B-schéma séparé, c'est le cas envisagé dans [MB 2].

0.5. *Les données locales sur* $\mathcal{X}$. Pour tout $v \in \Sigma$, on fixe un *ouvert* Ω_v de $\mathcal{X}(L_v)$, pour la topologie v-adique (cf. définition 2.2), avec les propriétés suivantes :

(a) Ω_v est invariant sous le groupe des K_v-automorphismes de L_v ;

(b) Ω_v est *dense* dans $\mathcal{X}_{L_v}$ pour la topologie de Zariski (« Zariski-dense », en abrégé).

La condition (b) signifie ceci : pour tout sous-champ ouvert non vide $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}_{L_v}$, il existe un objet x de Ω_v qui appartient à $\mathcal{U}(L_v)$. On verra d'ailleurs (compte tenu de (a), cf. 2.5.1) que la densité dans $\mathcal{X}_{L_v}$ équivaut à la densité dans $\mathcal{X}_{K_v}$. De plus, on établira (2.5.4) le critère de densité suivant :

0.5.1. Proposition. *Soit $v \in \Sigma$ et soit Ω un ouvert de $\mathcal{X}(L_v)$, invariant sous* Aut (L_v/K_v).

(i) *On suppose que $L_v = \overline{K}_v$. Pour que Ω soit Zariski-dense dans $\mathcal{X}_{L_v}$, il faut et il suffit qu'il rencontre chaque composante irréductible de $\mathcal{X}_{K_v}$.*

(ii) *On suppose que L_v/K_v est galoisienne, et l'on note $\mathcal{X}^0$ l'ouvert de lissité de $\mathcal{X}_{\mathrm{red}}$ sur R* (qui est un sous-champ ouvert de $\mathcal{X}_{\mathrm{red}}$). *Pour que Ω soit Zariski-dense dans $\mathcal{X}_{L_v}$, il faut et il suffit que $\mathcal{X}^0_K$ soit Zariski-dense dans $(\mathcal{X}_K)_{\mathrm{red}}$ et que Ω rencontre toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}^0_{K_v}$.*

0.5.2. Remarques. On exprimera la condition de densité de $\mathcal{X}^0_K$ dans $(\mathcal{X}_K)_{\mathrm{red}}$ en disant que $\mathcal{X}_{\mathrm{red}}$ est *génériquement lisse* sur K. Cette condition est automatique dans le cas arithmétique ; d'autre part, si $\mathcal{X}$ est un schéma, elle signifie simplement que les corps résiduels des points maximaux de $\mathcal{X}$ sont des extensions *séparables* de K.

0.5.3. Nous noterons $\mathbf{\Omega}$ le produit des Ω_v, pour v parcourant Σ : il s'identifie naturellement à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{X}(\mathbb{L})$.

Si $x \in \mathcal{X}(K^{\mathbb{L}})$ (abus d'écriture pour « $x \in \mathrm{ob}\, \mathcal{X}(K^{\mathbb{L}})$ »), on dira, toujours par abus, que $x \in \mathbf{\Omega}$ si, pour tout K-plongement de $K^{\mathbb{L}}$ dans $\mathbb{L}$, l'image de x dans $\mathcal{X}(\mathbb{L})$ déduite de ce plongement appartient à $\mathbf{\Omega}$ (ou, de façon équivalente : pour tout $v \in \Sigma$ et tout K-plongement de $K^{\mathbb{L}}$ dans L_v, l'image de x dans $\mathcal{X}(L_v)$ appartient à Ω_v). Cette notion s'étend immédiatement au cas d'un objet de $\mathcal{X}(A)$ où A est un sous-anneau de $K^{\mathbb{L}}$, par exemple $R^{\mathbb{L}}$.

0.6. Définition. Une *donnée de Skolem* est une suite $\mathcal{S} = (\mathcal{X} \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \mathbf{\Omega})$ où :

- $B = \mathrm{Spec}\,(R)$ est comme en 0.2 ;
- $\mathbb{L} = \prod_{v \in \Sigma} L_v$ comme en 0.3 ;
- $\mathcal{X} \xrightarrow{f} B$ est un B-champ algébrique vérifiant 0.4 (a) et (b) ;
- $\mathbf{\Omega} = \prod_{v \in \Sigma} \Omega_v$ où les $\Omega_v \subset \mathcal{X}(L_v)$ sont comme en 0.5.

(On notera encore K, Σ, etc. comme plus haut les données implicites dans $\mathcal{S}$.)

Une telle donnée de Skolem $\mathcal{S}$ est dite *complète* si l'ensemble des places de K est réunion de Σ et de $B^{(1)}$, et *incomplète* sinon.

Elle est dite *séparable* si $\mathcal{X}$ est réduit et génériquement lisse sur K (cf. 0.5.2) et si, pour tout $v \in \Sigma$, L_v/K_v est finie galoisienne et Ω_v est contenu dans $\mathcal{X}_K^0(L_v)$, où $\mathcal{X}_K^0$ est l'ouvert de lissité de $\mathcal{X}_K$.

Un *point entier* de $\mathcal{S}$ est un objet x de $\mathcal{X}(R^{\mathbb{L}})$ qui appartient à $\mathbf{\Omega}$ au sens de 0.5.3 ci-dessus.

0.6.1. Remarque. Cette notion diffère de celle de [MB 2] par les points suivants : $\mathcal{X}$ est ici un champ plutôt qu'un schéma ; il n'est plus supposé séparé, ni géométriquement irréductible sur K, cette dernière condition étant remplacée par 0.4 (b) moins restrictive ; la condition « $\Omega_v \neq \emptyset$ » de [MB 2] est en conséquence remplacée par la condition de densité 0.5 (b), et l'on ne suppose plus que les Ω_v sont formés de points lisses.

Nous pouvons enfin énoncer notre résultat principal :

0.7. Théorème. *Toute donnée de Skolem incomplète admet un point entier.*

0.8. Remarques, cas particuliers.

0.8.1. Le cas le plus important pour les applications est celui où $L_v = K_v$ pour tout $v \in \Sigma$. On peut d'ailleurs s'y ramener, cf. 3.1.1. Dans ce cas, $K^{\mathbb{L}}$ est la plus grande extension algébrique de K qui est totalement décomposée en chaque $v \in \Sigma$, et Ω_v est un ouvert de « points K_v-rationnels » de $\mathcal{X}$. On suggère au lecteur effarouché par les notations de garder à l'esprit ce cas particulier.

0.8.2. Lorsque $\mathcal{X}$ est un schéma, que $\mathcal{X}_K$ est géométriquement irréductible sur K, et que L_v/K_v est finie galoisienne (resp. que $L_v = \overline{K}_v$) pour tout $v \in \Sigma$, on retrouve le théorème 1.3 de [MB 2] (resp. le théorème de densité de Rumely [Ru 1]). Le sous-cas où $\Sigma = \emptyset$ est le théorème d'existence de Rumely ([Ru 1], [MB 1]). Celui où $\mathcal{X}_K$ est unirationnel et où $L_v = K_v$ pour tout v est établi dans [C-R]. Une démonstration du résultat de [MB 2], annoncée indépendamment par P. Roquette vers la même époque, est publiée dans [G-P-R].

0.8.3. Le cas où $R = K$ est déjà intéressant, même dans la situation de [MB 2] ; on en trouvera une démonstration simplifiée dans [P], («Theorem », qui est cependant présenté à tort comme « a significant generalization of a special case of Rumely's Local-Global Principle » ; il s'agit au contraire d'un cas particulier d'une généralisation).

Comme l'a remarqué Pop, ce cas particulier entraîne trivialement, par exemple, que le corps des nombres algébriques totalement réels est « pseudo-réel clos » ; de plus tous les corps K^{Σ} ont la propriété suivante : si V est une K^{Σ}-variété lisse géométriquement irréductible de dimension >0, alors l'ensemble $V(K^{\Sigma})$ est vide ou infini. Pop appelle « large field » un corps ayant cette propriété ; d'autres ont proposé depuis « ample » plutôt que « large ». Je suggère « corps fertile » pour la traduction française.

Quoi qu'il en soit, cette propriété a des conséquences importantes sur la théorie de Galois de ces corps, liées au « problème de Galois inverse » (voir [P], Main Theorem A, et aussi [D-D] pour un exposé des principales conjectures dans ce domaine).

0.8.4. Remarque. Au lieu des complétés de K aux places de Σ, on aurait pu utiliser systématiquement les *hensélisés* (en une place v archimédienne, on peut définir l'hensélisé de K comme la fermeture algébrique de K dans son complété en v). Ceci ne changerait pas l'énoncé du théorème, ni, pour l'essentiel, la démonstration. L'emploi des complétés nous permet d'utiliser directement [MB 2], où il était justifié par le rôle crucial des arguments de compacité ; il est aussi plus conforme à la tradition – peut-être contestable – des arithméticiens. En revanche, la variante hensélienne du théorème de recollement 1.4 est bien plus facile à démontrer que celle utilisée ici (voir [MB 4], 5.4.6).

0.9. Exemple. Soit g un entier ≥1. Fixons des nombres premiers $p_1,\dots, p_n$ et, pour chaque $i \in \{1,\dots,n\}$ une courbe C_i lisse, projective, géométriquement irréductible de genre g sur $\mathbb{F}_{p_i}$. Alors il existe un corps de nombres E, décomposé en chaque p_i, et une courbe C lisse de genre g sur l'anneau des entiers de E, dont la fibre en chaque place de E au-dessus de l'un des p_i est $\mathbb{F}_{p_i}$-isomorphe à la courbe C_i correspondante.

Il suffit en effet d'appliquer 0.7 à la donnée de Skolem suivante : $K = \mathbb{Q}$, $R = \mathbb{Z}[1/p_1 \dots p_n]$, $\Sigma = \{p_1,\dots, p_n\}$, $L_{p_i} = \mathbb{Q}_{p_i}$, $\mathscr{X} = \mathscr{M}_{g,R}$ (le R-champ des courbes lisses de genre g), $\Omega_{p_i} = \{\, \Gamma \in \mathrm{ob}\mathscr{X}(\mathbb{Q}_{p_i}) \mid \Gamma$ est fibre générique d'une courbe lisse de genre g sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{p_i})$, de fibre spéciale $\mathbb{F}_{p_i}$-isomorphe à C_i $\}$.

Le lecteur vérifiera que les conditions définissant une donnée de Skolem incomplète sont bien vérifiées ; en particulier, $\mathscr{X}_{\mathbb{Q}}$ est ici géométriquement irréductible, l'incomplétude vient de ce que la place archimédienne n'est pas dans Σ, les Ω_{p_i} sont des ouverts d'après 2.6 (i), non vides parce que $\mathscr{M}_g$ est lisse sur $\mathbb{Z}$ (i.e. d'après la théorie des déformations des courbes lisses).

Il y a d'autres exemples intéressants d'ouverts de $\mathcal{M}_g(F)$, où F est un corps local, par exemple :

– l'ensemble des courbes C sur F telles que $C(F)$ soit vide (resp. non vide) ;
– (pour $F = \mathbb{R}$) l'ensemble des courbes C sur $\mathbb{R}$ telles que $C(\mathbb{R})$ ait r composantes connexes (r fixé) ;
– (pour F non archimédien) l'ensemble des courbes C sur F ayant bonne réduction (resp. potentiellement bonne réduction) sur les entiers de F ;
– (pour n entier >0 fixé) l'ensemble des courbes C sur F telles que le $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-module $H^1_{\mathrm{et}}(C_{\overline{F}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ soit isomorphe à un module fixé.

Je laisse au lecteur le plaisir de vérifier que les exemples ci-dessus donnent bien des ouverts. Bien entendu, lorsque l'on explicite les cas particuliers de 0.7 ainsi obtenus, il faut s'assurer, d'une part, que les ouverts considérés sont non vides, et d'autre part que la donnée de Skolem envisagée est incomplète. Cette dernière précaution est toutefois superflue si $g \geq 3$, comme nous le verrons plus bas (0.11, 5.9).

0.9.1. Variante. (détails laissés au lecteur) Au lieu d'une courbe C_i, on peut se donner pour chaque p_i un revêtement modérément ramifié $\pi_i : C'_i \to C_i$ de courbes sur $\mathbb{F}_{p_i}$, en imposant à ces revêtements d'avoir même type topologique (les C_i ont même genre, les C'_i aussi, et pour chaque i il existe une bijection entre les points de ramification géométriques de C'_i et ceux de C'_1, respectant les relations données par les revêtements et les indices de ramification). Soit S l'ensemble des nombres premiers divisant les indices de ramification des π_i. Alors il existe un corps de nombres E, décomposé en chaque p_i, et un revêtement de courbes lisses sur l'anneau des S-entiers de E (appellation malencontreuse mais traditionnelle pour les éléments de K qui sont entiers hors de S) qui pour chaque i induit π_i aux places au-dessus de p_i, en un sens évident.

0.10. Exemple. (détails au § 6) Soient K un corps de nombres, Σ un ensemble fini de places de K, R un localisé de l'anneau des Σ-entiers de K. Soit G un R-schéma en groupes lisse, séparé et de type fini et, pour tout $v \in \Sigma$, soit X_v un G-torseur sur $\mathrm{Spec}(K_v)$. Alors il existe un corps de nombres E, décomposé en chaque $v \in \Sigma$, et un G-torseur X sur la fermeture intégrale R' de R dans E tels que X induise, pour tout plongement de E dans K_v, un torseur isomorphe à X_v. (« théorème d'approximation forte pour les G-torseurs sur R^{Σ} »).

C'est en effet ce que donne 0.7 appliqué au champ classifiant $\mathcal{X}$ de G sur $\mathrm{Spec}(R)$.

Notons cependant que la donnée de Skolem obtenue est complète si R est l'anneau des Σ-entiers de K et si Σ contient toutes les places archimédiennes de K (et l'argument de propreté que nous verrons dans 0.11 ne s'applique pas tel quel puisque $\mathscr{X}$ n'est pas un schéma). Cependant, $\mathscr{X}$ a la propriété de « propreté faible » suivante : si Λ est une R-algèbre qui est un anneau de valuation discrète, de corps des fractions F, et si X est un G-torseur sur F, alors il existe une extension finie séparable F' de F tel que $X_{F'}$ se prolonge en un G-torseur sur la fermeture intégrale de Λ dans F'. (En effet, il suffit pour cela que $X(F') \neq \emptyset$). Comme on le verra au § 5, ceci suffit à conclure ; le lecteur pourra d'ailleurs s'amuser à le démontrer directement dans ce cas particulier.

Ce type de résultat peut se formuler agréablement en termes cohomologiques. Posons comme d'habitude $B = \operatorname{Spec}(R)$ et notons $\mathbb{L}$ le produit des K_v pour $v \in \Sigma$. On a des applications canoniques

(0.10.1) $$\mathrm{H}^1(R^{\Sigma}, G) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^1(K^{\Sigma}, G) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^1(\mathbb{L} \otimes_K K^{\Sigma}, G)$$

où, pour se rassurer, on peut remarquer que le dernier H^1 s'identifie à la limite inductive des $\mathrm{H}^1(\mathbb{L} \otimes_K K', G)$ où K' parcourt les extensions finies de K contenues dans K^{Σ}. Le résultat énoncé au début de 0.10 dit simplement que $\beta \circ \alpha$ est *surjective*. Plus précisément, on établira au § 6, entre autres, les résultats suivants :

- α et β sont surjectives ;
- si G_K est connexe, si $G \to B$ vérifie la condition (b) de 0.4, et s'il existe une place de K n'appartenant pas à $B^{(1)} \cup \Sigma$, alors α et β sont bijectives.

0.11. *Élimination de l'hypothèse d'incomplétude.* L'argument du début de 0.10 est un cas très particulier de situation où l'hypothèse d'incomplétude est superflue. Supposons par exemple que la donnée de Skolem $\mathscr{S} = (\mathscr{X} \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \boldsymbol{\Omega})$ soit complète mais que $\mathscr{X}$ soit un schéma (voire un espace algébrique) et que $\mathscr{X}_K$ soit *propre* sur K. Alors il existe un point b de $B^{(1)}$ tel que f soit propre au-dessus de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{B,b})$. Le critère valuatif de propreté montre alors que tout point entier de la restriction de $\mathscr{S}$ à $B - \{b\}$ se prolonge en un point entier de $\mathscr{S}$, ce qui montre que $\mathscr{S}$ admet un point entier.

On peut généraliser cet argument dans plusieurs directions. Par exemple, si $\mathscr{X}_K$ est un ouvert d'une K-variété projective géométriquement irréductible V, dont le fermé complémentaire est de codimension ≥ 2, un argument de section linéaire permet de se ramener au cas propre (cf. [MB 3], 3.1). Des variantes de ce genre d'énoncé existent dans le cadre des champs algébriques, où la notion de morphisme propre est cependant d'un usage plus délicat. Quelques énoncés précis seront donnés au § 5. Un cas particulier important est le corollaire 5.9, montrant que dans l'exemple 0.9 ci-dessus l'hypothèse d'incomplétude est inutile si $g \geq 3$.

Bien entendu les considérations précédentes ne constituent nullement une théorie générale comme pourrait l'être une extension – qui reste à faire – de la théorie des capacités de [Ru 2] au présent contexte.

0.12. *Plan de l'article.* Le théorème 0.7 est établi au § 4, par réduction à la situation de [MB 2]. La preuve nécessite, après des rappels et préliminaires sur les champs algébriques (§ 1), quelques résultats élémentaires présentés au § 2 sur la « topologie forte » sur $\mathscr{X}(F)$ lorsque $\mathscr{X}$ est un champ algébrique de type fini sur un corps local F. On explique au § 3 des procédés de réduction permettant, pour la preuve de § 0.7, de supposer que la donnée de Skolem considérée est séparable, et aussi de remplacer le champ donné $\mathscr{X}$ par un ouvert non vide de $\mathscr{X}$, quitte à « élargir Σ ». Ces constructions généralisent celles de [MB 2], remarques 1.9 et 1.10 ; leur extension au cas des champs fait cependant usage d'un résultat non trivial de recollement (1.4, [MB 4]).

Le §5 est consacré au problème de l'élimination de l'hypothèse d'incomplétude , déjà évoqué en 0.11, et le §6 à l'étude des torseurs sur les anneaux R^{Σ}.

1. Résultats sur les champs algébriques.

Par « champ algébrique », nous entendrons toujours, conformément à la terminologie de [L-MB], un « champ algébrique quasi-séparé » au sens d'Artin [A]. Rappelons qu'un tel champ $\mathscr{X}$, sur un schéma de base S qui sera souvent omis des notations, est défini par les données suivantes :

(a) pour tout S-schéma T, une catégorie $\mathscr{X}(T)$ qui est un groupoïde (toutes les flèches de $\mathscr{X}(T)$ sont des isomorphismes) ;

(b) pour tout S-morphisme $h : T' \to T$, un foncteur de « changement de base » $h^* : \mathscr{X}(T) \to \mathscr{X}(T')$ (noté aussi $x \longmapsto x_{T'}$) ; ces données faisant de $\mathscr{X}$ une catégorie fibrée en groupoïdes sur la catégorie des S-schémas (en particulier, pour $T'' \xrightarrow{h'} T' \xrightarrow{h} T$, on a un isomorphisme de foncteurs $h'^* h^* \simeq (hh')^*$, avec contrainte d'associativité pour une suite de trois morphismes).

On demande aussi à $\mathscr{X}$ de vérifier les axiomes suivants :

(c) (représentabilité relative) pour tout S-schéma T et tout couple (x, y) d'objets de $\mathscr{X}(T)$, le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}\,(x, y)$ qui à tout T-schéma T' associe l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}(T')}(x_{T'}, y_{T'})$ est un T-*espace algébrique* [K] quasi-compact et séparé sur T ; noter que ce foncteur est en particulier un faisceau fppf (et même un faisceau fpqc, d'après [L-MB], (A.4)), et que l'espace algébrique $\underline{\mathrm{Isom}}\,(x, y)$ est en fait de type fini sur T ([L-MB], (3.3)).

(d) $\mathscr{X}$ est un champ pour la topologie étale : pour toute famille couvrante $(h_i : T_i \to T)_{i \in I}$ pour la topologie étale, toute famille d'objets $(x_i \in \mathrm{ob}\mathscr{X}(T_i))_{i \in I}$ munie d'une donnée de descente relativement à la famille (h_i) provient d'un objet de $\mathscr{X}(T)$, qui est unique à isomorphisme unique près à cause de (c) ;

(e) (représentabilité locale) il existe un S-schéma X et un objet P de $\mathscr{X}(X)$ qui est lisse et surjectif sur $\mathscr{X}$ au sens suivant : pour tout S-schéma T et tout $x \in \mathrm{ob}\,\mathscr{X}(T)$, le T-espace algébrique $\underline{\mathrm{Isom}}\,(x_{X \times_S T}, P_{X \times_S T})$ est lisse et surjectif sur T.

1.1. Remarques.
(i) Si dans (e) on remplace « lisse » par « étale » on obtient la définition plus restrictive adoptée par Deligne et Mumford dans [D-M], et nous dirons dans ce cas que $\mathscr{X}$ est un *champ de Deligne-Mumford*.

(ii) Des théorèmes d'Artin (cf. [L-MB], chapitre 10) montrent qu'on obtient une définition équivalente en remplaçant, dans la condition (d), la topologie étale par la topologie fppf.
(iii) Un S-espace algébrique (et *a fortiori* un S-schéma) Y définit un S-champ algébrique, encore noté Y : on associe à $T \to S$ la catégorie discrète dont l'ensemble d'objets est $Y(T) = \mathrm{Hom}_S(T, Y)$. Les champs ainsi obtenus (dits « représentables ») sont exactement, à 1-isomorphisme près, les champs algébriques $\mathcal{X}$ tels que, pour tout $T \to S$, la catégorie $\mathcal{X}(T)$ soit équivalente à une catégorie discrète (pour tout objet $x \in \mathrm{ob}\, \mathcal{X}(T)$ on a $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}(T)}(x) = \{\mathrm{id}_x\}$) : cf. [L-MB], (8.1.1).
(iv) Les S-champs algébriques forment une 2-*catégorie* (ChAlg/S) : si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux S-champs algébriques, un *1-morphisme* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est la donnée, pour tout S-schéma T, d'un foncteur $F(T) : \mathcal{X}(T) \to \mathcal{Y}(T)$, et pour tout $h : T' \to T$, d'un isomorphisme de foncteurs $h^* \circ F(T) \simeq F(T') \circ h^*$, compatible aux isomorphismes de composition de (b). Les 1-morphismes de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ forment eux-mêmes une (1-)catégorie dont les morphismes (morphismes de foncteurs) sont les *2-morphismes* de (ChAlg/S). En particulier, pour tout S-champ algébrique $\mathcal{X}$ et tout S-schéma T, la catégorie des 1-morphismes de T (vu comme S-champ) vers $\mathcal{X}$ est canoniquement équivalente à la catégorie $\mathcal{X}(T)$. Nous identifierons couramment ces deux catégories.

La méthode standard de démonstration des propriétés des champs algébriques consiste à se ramener au cas des schémas en utilisant (e) ; nous ne faillirons pas à cette saine tradition. Il est donc essentiel, étant donné un champ algébrique $\mathcal{X}$, de trouver des schémas X et des objets de $\mathcal{X}(X)$ (ou, ce qui revient au même, des 1-morphismes $X \to \mathcal{X}$) ayant de « bonnes » propriétés. Des exemples, utiles pour la suite, de tels énoncés sont fournis par 1.2 et 1.3 ci-dessous :

1.2. Théorème ([L-MB], (6.3)). *Soient $\mathcal{X}$ un champ algébrique, K un corps et x :* $\mathrm{Spec}\,(K) \to \mathcal{X}$ *un 1-morphisme* (i.e. un objet de $\mathcal{X}(K)$). *Alors il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathrm{Spec}\,(K) \arrow[ur, "x_1"] \arrow[r, "x"] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

où X est un schéma affine et φ un 1-morphisme lisse. □

1.2.1. Remarque. L'énoncé ci-dessus contient un abus de langage courant : il aurait fallu écrire « 2-commutatif », ce qui signifie qu'il existe un 2-isomorphisme entre les 1-morphismes x et $\varphi\circ x_1$ de $\mathrm{Spec}\,(K)$ dans $\mathscr{X}$ (ou encore : les objets x et $\varphi\circ x_1$ de la catégorie $\mathscr{X}(K)$ sont isomorphes).

1.3. Théorème ([L-MB], (6.5)). *Soient S un schéma et $\mathscr{X}$ un S-champ algébrique. Il existe un sous-champ ouvert dense $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}$ et une famille dénombrable $(p_n : X_n \to \mathscr{U})_{n\geq 1}$ de 1-morphismes ayant les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout* $n\geq 1$,

(a) X_n *est un espace algébrique ;*

(b) p_n *est* lisse, surjectif, séparé, de type fini, à fibres géométriquement connexes ;

(ii) *pour tout anneau* artinien *K, tout 1-morphisme* $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathscr{U}$ *se relève à l'un des* X_n. □

1.4. Théorème [MB 4]. *Soient S un schéma localement noethérien, s un point fermé de S, $\pi : S' \to S$ le S-schéma spectre du complété de $\mathcal{O}_{S,s}$, U l'ouvert $S-\{s\}$ de S, $U' = \pi^{-1}(U)$. Soit $\mathscr{X}$ un S-champ algébrique de type fini. Alors le foncteur naturel*

$$\mathscr{X}(S) \longrightarrow \mathscr{X}(U) \times_{\mathscr{X}(U')} \mathscr{X}(S')$$

est pleinement fidèle, et est même une équivalence de catégories *si S est excellent, ou encore si S est régulier de dimension* 1. □

En d'autres termes, deux objets de $\mathscr{X}(U)$ et $\mathscr{X}(S')$ respectivement, dont les restrictions à U' sont isomorphes, peuvent être recollés en un objet de $\mathscr{X}(S)$.

1.5. *Champs de torseurs.* Soient X un S-espace algébrique et G un S-espace algébrique en groupes opérant sur X. On définit le *champ quotient* $\mathscr{X} = [X/G]$ comme suit : pour tout S-schéma T, $\mathscr{X}(T)$ est la catégorie des diagrammes $(T \xleftarrow{\pi} \widetilde{T} \xrightarrow{\varphi} X_T = X \times_S T)$ où $\widetilde{T}$ est un G_T-torseur sur T et φ un T-morphisme G_T-équivariant.

Précisons que par « G_T-torseur » nous entendons un faisceau sur le site fppf de T, muni d'une action de G_T, qui est localement (pour la topologie fppf) isomorphe à G_T muni de l'action par translations. Un tel faisceau est un espace algébrique mais n'est pas nécessairement un schéma, même si G en est un. L'ensemble pointé des classes d'isomorphie de G-torseurs sur S est noté $\mathrm{H}^1(S, G)$; lorsque S est le spectre d'un anneau A on le note aussi $\mathrm{H}^1(A, G)$.

Si G est plat, de présentation finie et séparé sur S, et si X est quasi-séparé sur S, alors $\mathscr{X}$ est un S-champ algébrique ([L-MB], (10.13.1)). Un cas particulier important est celui où $X=S$ (de sorte que G opère trivialement). Dans ce cas, $\mathscr{X}(T)$ est simplement la catégorie des G_T-torseurs sur T ; ce champ $[S/G]$ est parfois appelé *champ classifiant* de G et noté BG. Le G-torseur trivial sur S définit une section $S \to [S/G]$ du morphisme structural, qui est surjective et plate et n'est autre, d'ailleurs, que le G-torseur universel sur $[S/G]$. Ceci implique notamment que $[S/G]$ est plat et surjectif sur S, à fibres géométriquement irréductibles.

2. Topologie d'un champ sur un corps local.

2.1. Soit F un corps topologique séparé. Pour tout F-schéma localement de type fini X, on peut définir une topologie, dite *forte*, sur $X(F)$, caractérisée par les propriétés suivantes :

- pour $X = \mathbb{A}^n_F$, la topologie forte sur $X(F) = F^n$ est la topologie produit déduite de la topologie de F ;

- pour tout F-morphisme $f: X \to Y$, l'application induite $X(F) \to Y(F)$ est continue ; si f est une immersion ouverte (resp. fermée), la topologie forte sur $X(F)$ est induite par la topologie forte sur $Y(F)$, et fait de $X(F)$ un ouvert (resp. un fermé) de $Y(F)$.

2.2. Définition. Soit $\mathcal{X}$ un champ algébrique localement de type fini sur un corps topologique séparé F. Un *ouvert* de $\mathcal{X}(F)$ (pour la topologie forte) est une sous-catégorie Ω de $\mathcal{X}(F)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(a) Ω est *strictement pleine*, i.e. si $x \in \mathrm{ob}\,\Omega$, toute flèche dans $\mathcal{X}(F)$ de source x appartient à Ω ;

(b) si T est un F-schéma de type fini et $\varphi: T \longrightarrow \mathcal{X}$ un 1-morphisme, alors $\varphi^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $T(F)$ pour la topologie forte.

2.3. Remarques. (i) Il est immédiat que l'on obtient ainsi une topologie sur l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{X}(F)$, et que cette topologie coïncide, aux identifications habituelles près, avec celle définie en (2.1) lorsque $\mathcal{X}$ est représentable par un F-schéma.

(ii) Pour tout 1-morphisme $\varphi: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de F-champs algébriques localement de type fini, le foncteur induit $\varphi(F): \mathcal{X}(F) \to \mathcal{Y}(F)$ est « continu pour la topologie forte » : si Ω est un ouvert de $\mathcal{Y}(F)$, $\varphi^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $\mathcal{X}(F)$.

(iii) Les ouverts de $\mathcal{X}(F)$ s'identifient à ceux de $\mathcal{X}_{\mathrm{red}}(F)$ par l'équivalence de catégories $\mathcal{X}_{\mathrm{red}}(F) \to \mathcal{X}(F)$ déduite de l'immersion naturelle $\mathcal{X}_{\mathrm{red}} \to \mathcal{X}$.

2.4. Convention. Nous supposerons dans ce qui suit que F est un corps muni d'une valeur absolue notée $|\ |$ (et de la topologie correspondante), de l'un des deux types suivants :

(i) (« cas archimédien ») $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (avec la valeur absolue ordinaire) ;

(ii) (« cas non archimédien ») $|\ |$ est associée à une valuation (à valeurs réelles), d'anneau Λ *hensélien*.

2.4.1. Remarque. Dans les deux cas, le corps valué F a les propriétés suivantes :

(i) pour tout morphisme lisse (resp. étale) $X \longrightarrow Y$ de F-schémas de type fini, l'application continue induite $X(F) \longrightarrow Y(F)$ est ouverte (resp. est un homéomorphisme local) ;

(ii) la valeur absolue se prolonge de manière unique à toute extension algébrique F' de F, que l'on munira toujours de la topologie correspondante (pour le cas non archimédien, voir [Ri] ou [E], où cette propriété est en fait prise comme définition d'une valuation hensélienne). En particulier, soit G un groupe de F-automorphismes de F' : alors pour tout F-champ algébrique de type fini $\mathcal{X}$, G opère « continûment » sur la catégorie $\mathcal{X}(F')$ et l'on peut parler d'*ouverts G-invariants* de $\mathcal{X}(F')$.

(iii) Voici un exemple d'ouvert (voir aussi 0.9) : soit G un F-espace algébrique en groupes lisse sur F, et notons $\mathcal{X} = [\operatorname{Spec} F/G]$ le champ classifiant de G (cf. 1.5). Pour tout G-torseur X sur F, notons

$$\operatorname{Iso}(X) := \{ Y \in \operatorname{ob} \mathcal{X}(F) \mid Y \simeq X \}$$

l'ensemble des G-torseurs isomorphes à X. Alors $\operatorname{Iso}(X)$ est un *ouvert* (évidemment non vide) de $\mathcal{X}(F)$: ceci résulte du fait que si S est un F-schéma de type fini et Y un G_S-torseur sur S, le faisceau $I := \underline{\operatorname{Isom}}_{\mathcal{X}(S)}(X_S, Y)$ est un S-espace algébrique lisse (c'est un torseur sous une forme tordue, et même une forme intérieure, de G_S), de sorte que d'après (i) l'image de $I(F)$ dans $S(F)$ est bien un ouvert, qui n'est autre que l'ensemble des $s \in S(F)$ tels que $Y_s \in \operatorname{Iso}(X)$.

2.5. *Critères de densité*. Soient $\mathcal{X}$ un F-champ algébrique de type fini, F' une extension algébrique de F, Ω un ouvert de $\mathcal{X}(F')$: nous dirons (cf. l'introduction) que Ω est *Zariski-dense* dans $\mathcal{X}$ (resp. dans $\mathcal{X}_{F'}$) si, pour tout sous-champ ouvert (de Zariski) non vide $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ (resp. de $\mathcal{X}_{F'}$), on a $\mathcal{U}(F') \cap \Omega \neq \emptyset$ (où l'on identifie le cas échéant $\mathcal{U}(F')$ à $\mathcal{U}_{F'}(F')$). Cette notion ne dépend que de Ω vu comme ouvert de $\mathcal{X}_{\mathrm{red}}(F')$.

2.5.1. Lemme. *Avec les hypothèses et notations de* 2.5, *si* Ω *est Zariski-dense dans* $\mathcal{X}_{F'}$ *il est Zariski-dense dans* $\mathcal{X}$. *La réciproque est vraie si* F' *est une extension normale de F et si* Ω *est invariant sous* $G := \operatorname{Aut}(F'/F)$.

Preuve (détails laissés au lecteur). La première assertion est immédiate. La seconde résulte de la remarque suivante : si $p : \mathcal{X}_{F'} \to \mathcal{X}$ est la projection canonique et si $\mathcal{U}$ est un sous-champ ouvert de $\mathcal{X}_{F'}$, alors $p(\mathcal{U})$ est un sous-champ ouvert de $\mathcal{X}$ et $p^{-1}(p(\mathcal{U}))$ est la réunion des $g\mathcal{U}$ pour $g \in G$. □

2.5.2. Proposition. *Soient $\mathcal{X}$ un F-champ algébrique localement de type fini, F' une extension algébrique de F, $\mathcal{U}$ un sous-champ ouvert dense de $\mathcal{X}$. Alors $\mathcal{U}_{F'}$ est dense dans $\mathcal{X}_{F'}$. De plus, dans chacun des cas suivants, $\mathcal{U}(F')$ est Zariski-dense dans $\mathcal{X}(F')$:*

(i) *$\mathcal{X}$ est lisse sur F ;*

(ii) *F' est algébriquement clos.*

Preuve. La première assertion est immédiate en raison du fait que le morphisme naturel $\mathcal{X}_{F'} \to \mathcal{X}$ est ouvert. Pour la seconde on peut donc supposer, et l'on suppose, que $F'=F$. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathcal{X}(F)$: montrons que $\Omega \cap \mathcal{U}(F)$ n'est pas vide. Soit $x : \mathrm{Spec}(F) \to \mathcal{X}$ appartenant à Ω : (1.2) fournit un F-schéma X (que l'on peut encore supposer irréductible), un 1-morphisme lisse $\pi : X \to \mathcal{X}$ et un point $x_1 \in X(F)$ dont l'image dans $\mathcal{X}(F)$ est isomorphe à x. Comme π est un morphisme ouvert, $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ est dense dans X ; comme d'autre part $\pi^{-1}(\Omega)$ est non vide par construction, il suffit de démontrer l'assertion en remplaçant $\mathcal{X}$ par X. Nous supposerons donc dans la suite que $\mathcal{X}=X$ est un *schéma*.

Cas (i) : la question étant locale pour la topologie de Zariski, nous pouvons supposer qu'il existe un morphisme étale $p : X \to \mathbb{A}^n_F$. Dans ces conditions, $p(\Omega)$ est ouvert dans F'^n, et d'autre part, si $Z=X-\mathcal{U}$, $p(Z)$ est contenu dans une hypersurface H de sorte que $p(Z(F')) \subset H(F')$ est d'intérieur vide dans F'^n (c'est clair si $n=1$, et l'on se ramène à ce cas en considérant une droite convenable non contenue dans H).

Cas (ii) (on s'inspire de [Sh], (VII, §2, Lemma 1)): on peut supposer que $F=F'$ est algébriquement clos, et que X est intègre et affine. Le résultat est évident si $\dim(X)=0$. Si $\dim(X)=1$ il s'agit de voir que Ω est infini : si X est lisse cela résulte du cas (i) ; on se ramène à ce cas en considérant le normalisé $\pi : X' \to X$ de X et en notant que, vu l'hypothèse sur F, X' est lisse et $\pi^{-1}(\Omega) \subset X'(F)$ n'est pas vide. Enfin, si $\dim(X)>1$, soit $x \in \Omega$: il existe une courbe intègre $Y \subset X$ passant par x et rencontrant $\mathcal{U}$. Appliquant le cas précédent à Y, on conclut que $\Omega \cap Y(F) \cap \mathcal{U}(F) \neq \emptyset$, d'où le résultat. □

2.5.3. Corollaire. *Soient $\mathcal{X}$ un F-champ algébrique localement de type fini, F' une extension algébrique de F. Pour qu'un ouvert $\Omega \subset \mathcal{X}(F')$ soit Zariski-dense dans $\mathcal{X}$, il faut qu'il rencontre toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}$; en outre, cette condition est* suffisante *dans chacun des deux cas suivants :*

(i) *$\mathcal{X}$ est lisse sur F ;*

(ii) *F' est algébriquement clos.*

Preuve. La nécessité est évidente. Pour la suffisance, on se ramène au cas où $\mathcal{X}$ est irréductible et Ω non vide, et l'assertion résulte alors aisément de 2.5.2. □

2.5.4. Corollaire. *Soient $\mathcal{X}$ un F-champ algébrique localement de type fini, F' une extension algébrique* normale *de F, Ω un ouvert de $\mathcal{X}(F')$ invariant sous* $G := \mathrm{Aut}\,(F'/F)$.

(a) *On suppose que F' est une clôture algébrique de F. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Ω est Zariski-dense dans $\mathcal{X}$;*

(i bis) *Ω est Zariski-dense dans $\mathcal{X}_{F'}$;*

(ii) *Ω rencontre toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}$;*

(ii bis) *Ω rencontre toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_{F'}$.*

(b) *On suppose que F' est une extension* séparable *(donc galoisienne) de F. On désigne par $\mathcal{X}^0$ l'ouvert de lissité de $\mathcal{X}_{\mathrm{red}}$ sur F. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(iii) *Ω est Zariski-dense dans $\mathcal{X}$;*

(iii bis) *Ω est Zariski-dense dans $\mathcal{X}_{F'}$;*

(iv) *$\mathcal{X}^0$ est Zariski-dense dans $\mathcal{X}$, et Ω rencontre toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}^0$;*

(iv bis) *$\mathcal{X}^0$ est Zariski-dense dans $\mathcal{X}$, et Ω rencontre toutes les composantes irréductibles de $(\mathcal{X}^0)_{F'}$.*

Preuve. (a) résulte de 2.5.3, compte tenu de 2.5.1.

(b) L'équivalence (iii)$\Leftrightarrow$(iii bis) résulte de 2.5.1.

(iii)$\Rightarrow$(iv) : il est clair que si Ω est dense il rencontre toutes les composantes de $\mathcal{X}^0$. Pour voir que $\mathcal{X}^0$ est dense, on peut supposer $\mathcal{X}$ *réduit* ; désignons alors par $\mathcal{X}'$ le plus grand sous-champ ouvert *régulier* de $\mathcal{X}$ (qui contient $\mathcal{X}^0$). Comme $\mathcal{X}$ est réduit, $\mathcal{X}'$ est dense dans $\mathcal{X}$ et par suite $\Omega \cap \mathcal{X}'(F')$ est Zariski-dense dans $\mathcal{X}'$ et dans $\mathcal{X}$. Or on a $\mathcal{X}'(F') = \mathcal{X}^0(F')$ ([EGA IV], (17.15.1)), d'où la densité de $\mathcal{X}^0$ dans $\mathcal{X}$.

(iv)$\Rightarrow$(iv bis) : résulte de l'invariance de Ω et du fait que l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{X}^0$ s'identifie au quotient de l'ensemble des composantes irréductibles de $(\mathcal{X}^0)_{F'}$ par l'action naturelle de G.

(iv bis)⇒(iii bis) : si Ω rencontre toutes les composantes de $(\mathcal{X}^0)_{F'}$, alors $\Omega \cap \mathcal{X}^0(F')$ est Zariski-dense dans $(\mathcal{X}^0)_{F'}$ d'après 2.5.3. D'autre part la densité de $\mathcal{X}^0$ dans $\mathcal{X}$ implique celle de $(\mathcal{X}^0)_{F'}$ dans $\mathcal{X}_{F'}$, d'où la conclusion. □

Dans le cas *non archimédien*, on dispose d'une méthode spécifique de construction d'ouverts :

2.6. Proposition. *Dans le cas* (ii) *de* 2.4*, soit $\mathcal{X}$ un Λ-champ algébrique de type fini. Notons k le corps résiduel de Λ, et notons $\mathcal{X}_F = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\,(\Lambda)}$* Spec (F) *la fibre générique de $\mathcal{X}$ sur Λ. Alors :*

(i) *soit x_0 un objet de $\mathcal{X}(k)$, et soit $\mathcal{C}_{x_0}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{X}(\Lambda)$ formée des objets dont l'image naturelle dans $\mathcal{X}(k)$ est isomorphe à x_0. Alors l'image essentielle Ω_{x_0} de $\mathcal{C}_{x_0}$ dans $\mathcal{X}(F) = \mathcal{X}_F(F)$ est un ouvert de $\mathcal{X}_F(F)$;*

(ii) *l'image essentielle Ω de $\mathcal{X}(\Lambda)$ dans $\mathcal{X}_F(F)$ est un ouvert de $\mathcal{X}_F(F)$;*

(iii) *si $\mathcal{X}$ est surjectif et plat sur* Spec (Λ) *et $\mathcal{X}_F$ génériquement lisse sur F, il existe une extension finie séparable F' de F, d'anneau des entiers Λ', telle que $\mathcal{X}(\Lambda') \neq \emptyset$.*

Preuve. (i) L'assertion est bien connue lorsque $\mathcal{X}$ est un schéma. Dans le cas général, soit x un objet de $\mathcal{C}_{x_0}$, définissant par changement de base des objets x_F de $\mathcal{X}(F)$ et $x_k \simeq x_0$ de $\mathcal{X}(k)$. D'après (1.2), il existe un schéma X, un 1-morphisme lisse $\pi : X \longrightarrow \mathcal{X}$ et un point $x_1 \in X(k)$ relevant x_k. On peut voir ce dernier comme une section sur Spec (k) du Λ-espace algébrique $X \times_{\pi,\mathcal{X},x}$ Spec (Λ). Comme celui-ci est lisse sur Λ et que Λ est hensélien, x se relève en un point de $X(\Lambda)$ induisant $x_1 \in X(k)$. Autrement dit, x_F appartient à l'image U dans $\mathcal{X}(F)$ de $W := \{y_F \in X(F) \mid y_F$ se prolonge en un point $y \in X(\Lambda)$ se réduisant en $x_1 \in X(k)\}$. Comme W est un ouvert de $X(F)$ (cas des schémas) et que π est lisse, U est un ouvert de $\mathcal{X}(F)$ (ceci résulte de la définition et de 2.4.1 (i)), qui est évidemment contenu dans Ω_{x_0}.

(ii) est conséquence de (i) puisque Ω est réunion des Ω_{x_0}, pour $x_0 \in \mathcal{X}(k)$.

(iii) Soit $X \longrightarrow \mathcal{X}$ un schéma lisse et surjectif sur $\mathcal{X}$: alors X est encore surjectif et plat sur Spec (Λ), et X_F est génériquement lisse sur F. Nous sommes ainsi ramenés au cas où $\mathcal{X} = X$ est un schéma. Désignons par $\overline{F}$ (resp. $F^{\mathrm{s}} \subset \overline{F}$) une clôture algébrique (resp. séparable) de F, d'anneau des entiers $\overline{\Lambda}$ (resp. $\Lambda^{\mathrm{s}} = \overline{\Lambda} \cap F^{\mathrm{s}}$). On sait alors (cf. par exemple [MB 2], lemme 1.6.1) que $X(F^{\mathrm{s}})$ est *dense* dans $X(\overline{F})$. Comme X est surjectif et plat sur Spec (Λ), $X(\overline{\Lambda})$ est un ouvert *non vide* de $X(\overline{F})$, d'où $X(\Lambda^{\mathrm{s}}) = X(\overline{\Lambda}) \cap X(F^{\mathrm{s}}) \neq \emptyset$. □

3. Réductions.

3.1. *Réduction au cas séparable.* Supposons le théorème 0.7 démontré chaque fois que la donnée de Skolem envisagée est *séparable* (0.6), et montrons-le dans cas général. Soit donc $\mathcal{S} = (\mathcal{X} \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \mathbf{\Omega})$ une donnée de Skolem incomplète, dont on cherche un point entier. On peut supposer, et on suppose, que $\mathcal{X}$ est intègre.

Supposons d'abord $\mathcal{X}$ génériquement lisse sur K : il est alors facile de voir (utilisant par exemple [MB 2], lemme 1.6.1) qu'il existe pour tout $v \in \Sigma$ une extension *finie galoisienne* M_v de K_v, contenue dans L_v, telle que l'image réciproque Ω_v' de Ω_v dans $\mathcal{X}(M_v)$ rencontre toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}^0_{K_v}$. On peut dès lors remplacer, pour tout $v \in \Sigma$, L_v par sa sous-extension M_v et Ω_v par $\Omega_v' \cap \mathcal{X}^0(M_v)$: on obtient ainsi une donnée de Skolem séparable, dont tout point entier est un point entier de $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{X}$ n'est pas génériquement lisse sur K, il résulte de 2.5.4 (b) et des hypothèses de 0.3 (b) que l'on a nécessairement $L_v = \overline{K}_v$ pour tout $v \in \Sigma$ (et en conséquence $K^{\mathbb{L}} = \overline{K}$, sauf évidemment si Σ est vide, cas laissé au lecteur). Or il existe une extension finie normale K' de K telle que $(\mathcal{X}_{K'})_{\text{red}}$ soit génériquement lisse sur K' (prendre pour K' un corps de définition convenable de $(\mathcal{X}_{\overline{K}})_{\text{red}}$). Soit R' la fermeture intégrale de R dans K', et posons $\mathcal{X}' = (\mathcal{X}_{R'})_{\text{red}}$. Notons Σ' l'ensemble des places de K' au-dessus de Σ, et, pour $v' \in \Sigma'$ au-dessus de $v \in \Sigma$, soit $\Omega'_{v'}$ l'image réciproque de Ω_v par le foncteur naturel $\mathcal{X}'(\overline{K}_v) \longrightarrow \mathcal{X}'(\overline{K}_v)$ défini par le choix d'un K_v-plongement de $K'_{v'}$ dans $\overline{K}_v$. On obtient de la sorte une donnée de Skolem $\mathcal{S}' = (\mathcal{X}' \to \operatorname{Spec}(R'), \mathbb{L}', \mathbf{\Omega}')$ où $\mathcal{X}'$ est génériquement lisse sur K', et il est immédiat que si $x' \in \mathcal{X}'(\overline{R})$ est un point entier de $\mathcal{S}'$, l'image de x' par le foncteur naturel $\mathcal{X}'(\overline{R}) \longrightarrow \mathcal{X}(\overline{R})$ est un point entier de $\mathcal{S}$.

3.1.1. Remarque. On pourrait même se ramener au cas où $L_v = K_v$ pour tout $v \in \Sigma$. Ceci allégerait les notations mais compliquerait certaines réductions. Indiquons brièvement l'argument : par approximation faible, il existe une extension finie K' de K telle que, pour tout $v \in \Sigma$, tous les complétés de K' aux places au-dessus de v soient K_v-isomorphes à L_v. Il suffit de remplacer R par la fermeture intégrale R' de R dans K', $\mathcal{X}$ par $\mathcal{X} \otimes_R R'$, Σ par l'ensemble Σ' des places au-dessus de Σ, $\mathbb{L}$ par $\mathbb{L} \otimes K'$ (qui s'identifie au produit des K'_w pour $w \in \Sigma'$), et les Ω_v par les ouverts évidents ; remarquer que $(R')^{\mathbb{L}'} = R^{\mathbb{L}}$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on fixe une donnée de Skolem $\mathcal{S} = (\mathcal{X} \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \mathbf{\Omega})$, supposée *séparable*.

3.2. *Rétrécissement de* $\mathcal{X}_K$ (cf. [MB 2], remarque 1.9) : soit $\mathcal{U}_K$ un ouvert de Zariski dense de $\mathcal{X}_K$. On peut alors parler du fermé complémentaire $\mathcal{Y}_K$ de $\mathcal{U}_K$ dans $\mathcal{X}_K$; c'est un sous-champ fermé réduit de $\mathcal{X}_K$. Il admet une adhérence schématique $\mathcal{Y}$ bien définie dans $\mathcal{X}$ et, comme dans le cas des schémas, l'ouvert $\mathcal{U}$ complémentaire de $\mathcal{Y}$ est *dense dans chaque fibre* de f (et a naturellement pour fibre générique $\mathcal{U}_K$). En conséquence $\mathcal{S}'=(\mathcal{U}\xrightarrow{f}B,\ \mathbb{L},\ \mathbf{\Omega}\cap\mathcal{U}(\mathbb{L}))$ est encore une donnée de Skolem, incomplète si $\mathcal{S}$ l'est, dont tout point entier est un point entier de $\mathcal{S}$.

En particulier on peut toujours, pour prouver 0.7, supposer que $\mathcal{X}_K$ est *lisse* sur K (prendre pour $\mathcal{U}_K$ l'ouvert de lissité).

3.3. *Élargissement de* Σ (cf. [MB 2], remarque 1.10) : supposons $\mathcal{X}_K$ lisse sur K; soit v un point de $B^{(1)}$, et soit $B'=B-\{v\}$. On note R' l'anneau de B' (rappelons que B' est affine), et l'on pose $\mathcal{X}'=\mathcal{X}\times_B B'$.

3.3.1. Lemme. *Il existe une extension finie galoisienne* L_v *de* K_v, *d'anneau des entiers* Λ_v, *telle que l'ouvert* $\mathcal{X}(\Lambda_v)$ *de* $\mathcal{X}(L_v)$ (cf. 2.6) *soit* dense *dans* $\mathcal{X}_{K_v}$ *pour la topologie de Zariski.*

Preuve. Rappelons (2.5.1) que « dense dans $\mathcal{X}_{K_v}$ » équivaut ici à « dense dans $\mathcal{X}_{L_v}$ ». Soit K_1 une extension finie galoisienne de K telle que toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_{K'}$ soient géométriquement irréductibles sur K' ; soit R_1 la fermeture intégrale de R dans K_1. On peut remplacer R par R_1 et $\mathcal{X}$ par $\mathcal{X}_{R_1}$, puis par ses composantes irréductibles (qui sont surjectives sur Spec (R_1) en vertu de 0.4 (b)). Ceci nous ramène au cas où $\mathcal{X}_{K_v}$ est irréductible ; il suffit dès lors, d'après 2.5.3, de trouver L_v telle que $\mathcal{X}(\Lambda_v)\neq\emptyset$, ce qui est possible grâce à 2.6 (iii). □

3.3.2. Choisissons L_v comme dans le lemme et posons $\mathcal{S}'=(\mathcal{X}'\xrightarrow{f'}B',\ \mathbb{L}',\ \mathbf{\Omega}')$, où $f'=f_{B'}$, $\mathbb{L}'=\mathbb{L}\times L_v$, $\mathbf{\Omega}'=\mathbf{\Omega}\times\mathcal{X}(\Lambda_v)$, de sorte que nous avons « retiré v de B pour le mettre dans Σ ». On a tout fait pour que $\mathcal{S}'$ soit une donnée de Skolem, incomplète si $\mathcal{S}$ l'est, et de plus :

3.3.3. Lemme. *Soit* $x'\in\mathcal{X}'(R'^{\mathbb{L}'})$ *un point entier de* $\mathcal{S}'$. *Alors* x' *se prolonge en un objet* x *de* $\mathcal{X}(R^{\mathbb{L}})$, *qui est un point entier de* $\mathcal{S}$.

Preuve. Il existe une extension finie $\mathbb{L}'$-décomposée (et *a fortiori* $\mathbb{L}$-décomposée) K_1 de K telle que, si R_1' est la fermeture intégrale de R' dans K_1, x' provienne d'un objet de $\mathcal{X}'(R_1')=\mathcal{X}(R_1')$, que nous noterons encore x'. Si R_1 est la fermeture intégrale de R dans K_1 , il suffit de montrer l'existence de $x \in \mathscr{X}(R_1)$ prolongeant x' ; qu'un tel x soit un point entier de $\mathscr{S}$ résulte en effet aussitôt des définitions. Or Spec(R_1) est réunion de Spec(R_1') et des places de K_1 au-dessus de v ; en chacune de ces places, disons w, le complété $K_{1,w}$ s'identifie à un sous-corps de L_v puisque K_1 est L_v-décomposé ; quitte à étendre K_1 on peut supposer que $K_{1,w} \simeq L_v$ et par suite $R_{1,w} \simeq \Lambda_v$ (notation du lemme 3.3.1). Le fait que $x' \in \mathscr{X}(R_1')$ soit un point entier de $\mathscr{S}'$ signifie notamment, par définition de Ω_v que, pour chaque w, l'image de x' dans $\mathscr{X}(K_{1,w})$ se prolonge en un objet x_w de $\mathscr{X}(R_{1,w})$. L'existence de x résulte alors du théorème 1.4. □

3.4. Résumé. Les constructions qui précèdent montrent qu'on peut toujours, pour montrer l'existence d'un point entier, remplacer $\mathscr{X}$ par un ouvert donné $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}$, tel que $\mathscr{U}_K$ soit dense dans $\mathscr{X}_K$ (même si $\mathscr{U}$ n'est pas surjectif sur B), quitte à restreindre B et à augmenter Σ. Plus précisément, il existe alors une donnée de Skolem de la forme $\mathscr{S}' = (\mathscr{U}_{B'} \longrightarrow B', \mathbb{L}', \mathbf{\Omega'})$, où B' est un ouvert de B, qui est incomplète si $\mathscr{S}$ l'est et telle que tout point entier de $\mathscr{S}'$ se prolonge en un point entier de $\mathscr{S}$.

4. Preuve du théorème 0.7.

Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{X} \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \mathbf{\Omega})$ une donnée de Skolem incomplète et séparable (cf. 3.1).

4.1. *Réduction au cas où $\mathcal{X}$ est un schéma.*

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de Zariski de $\mathcal{X}$ et $(p_n : X_n \to \mathcal{U})_{n\geq 1}$ une famille de 1-morphismes ayant les propriétés (i) et (ii) de 1.3. En vertu de 3.4, nous pouvons, quitte à changer $\mathbb{L}$ et $\mathbf{\Omega}$, remplacer $\mathcal{X}$ par $\mathcal{U}$ et supposer ainsi que $\mathcal{U} = \mathcal{X}$, de sorte que les p_n sont surjectifs.

Pour tout $v \in \Sigma$, fixons un ensemble fini $\{x_{v,i}\}_{i\in I_v}$ d'objets de Ω_v, rencontrant toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_{L_v}$. La propriété (ii) de 1.3 (appliquée à l'anneau artinien $A = \prod_{v\in\Sigma} L_v^{I_v}$ et à l'objet de $\mathcal{U}(A)$ défini par tous les $x_{v,i}$) montre qu'il existe n tel que tous les $x_{v,i}$ $(v \in \Sigma,\ i \in I_v)$ se relèvent à p_n. Fixant n une fois pour toutes, nous poserons $X = X_n$ et $p_n = p : X \to \mathcal{X}$.

Alors, pour $v \in \Sigma$, $p^{-1}(\Omega_v)$ est un ouvert de $X(L_v)$, contenu dans l'ouvert de lissité de $X(L_v)$ parce que p est lisse, invariant sous $\mathrm{Gal}(L_v/K_v)$, et rencontrant de plus toutes les composantes irréductibles de X_{L_v}: en effet, la propriété (i) de 1.3 assure que, pour tout B-schéma T, p définit une bijection entre les composantes irréductibles de X_T et celles de $\mathcal{X}_T$, et induit même un morphisme surjectif entre composantes correspondantes.

Pour la même raison, la condition (b) de 0.4 sur les composantes géométriques est encore vérifiée par le morphisme composé $f \circ p : X \to \mathcal{X} \to B$. Autrement dit, $\mathcal{S}' := (f\circ p : X \to B, \mathbb{L}, p^{-1}(\mathbf{\Omega}))$ est une donnée de Skolem incomplète, et il est clair par construction que si $\mathcal{S}'$ admet un point entier $x \in X(R^{\mathbb{L}})$, alors $p(x) \in \mathrm{ob}\,\mathcal{X}(R^{\mathbb{L}})$ est un point entier de $\mathcal{S}$.

Nous sommes donc ramenés au cas où $\mathcal{X} = X$ est un *espace algébrique*. On sait alors ([K], II, 6.7) que X admet un ouvert de Zariski dense qui est un schéma, et il suffit donc, par 3.4, de montrer 0.7 lorsque $\mathcal{X}$ est un schéma, comme annoncé.

4.2. *Le cas d'un schéma.*

Soit dorénavant $\mathcal{S} = (X \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \mathbf{\Omega})$ une donnée de Skolem incomplète et séparable, où X est un schéma. Nous pouvons supposer X intègre et lisse sur B. Soit alors R_1 la fermeture intégrale de R dans le corps des fonctions de X : c'est une R-algèbre normale finie sur R et, comme X est normal, f se factorise en $X \xrightarrow{g} B_1 := \mathrm{Spec}\,(R_1) \xrightarrow{\pi} B$. Le corps des fractions K_1 de R_1 est la fermeture algébrique de K

dans le corps des fonctions de X_K, et il est alors bien connu que la fibre générique de g est *géométriquement irréductible*.

Montrons que g est *surjectif* : il suffit pour cela de remarquer que g se factorise en $X \xrightarrow{(\mathrm{id},\, g)} X \times_B B_1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} B_1$ et que l'image de (id, g) – c'est-à-dire le graphe de g – s'identifie à une composante irréductible de $X \times_B B_1$, donc est surjective sur B_1 d'après la condition (b) de 0.4.

Pour $v \in \Sigma$, soit $\Sigma_{1,v}$ l'ensemble des places de K_1 au-dessus de v, que l'on peut identifier à $\mathrm{Spec}(K_1 \otimes_K K_v)$. On dispose d'une suite d'applications naturelles

(4.2.1) $$\Omega_v \to X(L_v) \to B_1(L_v) = \mathrm{Hom}_K(K_1, L_v) \to \Sigma_{1,v}$$

dont la composée h peut s'écrire aussi $\Omega_v \to X_{K_v} \to \mathrm{Spec}(K_1 \otimes_K K_v) = \Sigma_{1,v}$ de sorte qu'elle est *surjective* (car $\Omega_v \to X_{K_v}$ est dense, $X_{K_v} \to \mathrm{Spec}(K_1 \otimes_K K_v)$ est surjective et $\mathrm{Spec}(K_1 \otimes_K K_v)$ est discret). En particulier K_1 est L_v-*décomposé* (en vertu de la surjectivité de $\mathrm{Hom}_K(K_1, L_v) \to \Sigma_{1,v}$). D'autre part Ω_v est somme disjointe des $h^{-1}(w)$, pour w parcourant $\Sigma_{1,v}$; pour chaque w, $h^{-1}(w)$ est non vide (surjectivité de h) et l'application $\Omega_v \to \mathrm{Hom}_K(K_1, L_v)$ de (4.2.1) induit une application

(4.2.2) $$h_w : h^{-1}(w) \to \mathrm{Hom}_{K_v}(K_{1,w}, L_v)$$

évidemment $\mathrm{Gal}(L_v/K_v)$-équivariante et donc *surjective*. Donc, si l'on fixe, pour chaque $w \in \Sigma_{1,v}$, un K_v-plongement i_w de $K_{1,w}$ dans L_v, alors $\Omega_{1,w} := {h_w}^{-1}(i_w)$ est un ouvert *non vide* de $X_{K_{1,w}}(L_v)$, clairement invariant sous $\mathrm{Gal}(L_v / K_{1,w})$.

En conclusion, on obtient une donnée de Skolem $\mathscr{S}_1 = (g : X \to B_1, \mathbb{L}_1, \mathbf{\Omega}_1)$ de la façon suivante :

- $g : X \to B_1$ est déjà défini ;
- on note Σ_1 la réunion des $\Sigma_{1,v}$ pour $v \in \Sigma$;
- pour chaque $v \in \Sigma$ et chaque $w \in \Sigma_{1,v}$, $\Omega_{1,w}$ est l'ouvert de $X_{K_{1,w}}(L_v)$ défini ci-dessus ;
- $\mathbb{L}_1$ est la K_1-algèbre produit des $L_v^{\Sigma_{1,v}}$, et $\mathbf{\Omega}_1$ le produit des $\Omega_{1,w}$.

Il est clair que $\mathscr{S}_1$ est incomplète et qu'un point entier de $\mathscr{S}_1$ définit un point entier de $\mathscr{S}$; d'autre part, comme la fibre générique de g est géométriquement irréductible, il résulte de [MB 2], théorème 1.3, que $\mathscr{S}_1$ admet bien un point entier. Ceci achève de prouver 0.7. □

5. Élimination de l'hypothèse d'incomplétude.

On conserve les notations K, R, B de 0.2 ; les considérations générales du début de ce paragraphe (5.1 à 5.3) pourraient s'étendre sans difficulté au cas où R est un anneau intègre (peut-être noethérien) et K son corps des fractions.

5.1. Définition. Soit $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de type fini de B-champs algébriques noethériens. On notera (*) la propriété suivante :

(*) pour tout anneau de valuation discrète Λ contenant R, de corps des fractions F, tout diagramme 2-commutatif de B-champs algébriques

(5.1.1)
$$\begin{tikzcd} U = \mathrm{Spec}(F) \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ V = \mathrm{Spec}(\Lambda) \arrow[r, "v"] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

où i est le monomorphisme canonique, se prolonge en un diagramme 2-commutatif

(5.1.2)
$$\begin{tikzcd} U' = \mathrm{Spec}(F') \arrow[r] \arrow[d, hook, "i'"'] & U \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ V' = \mathrm{Spec}(\Lambda') \arrow[r] \arrow[urr] & V \arrow[r, "v"] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

où F' est une extension finie de F et Λ' la fermeture intégrale de Λ dans F'.

On dira que f vérifie $(*)_{\mathrm{sep}}$ si de plus, avec les notations ci-dessus, l'extension F' de F peut être choisie *séparable*.

5.2. Remarques.

5.2.1. Si la condition (*) (resp. $(*)_{\mathrm{sep}}$) est satisfaite, elle s'étend immédiatement au cas où Λ est un anneau de Dedekind *semi-local* ; noter qu'alors Λ' a la même propriété.

5.2.2. Les conditions (*) et $(*)_{\mathrm{sep}}$ sont des variantes du critère valuatif de propreté pour les (1-morphismes de) champs algébriques. Elles en diffèrent par les faits suivants :

(i) aucune condition d'unicité n'est imposée (i.e. f n'est pas supposé séparé) ;
(ii) on se limite aux anneaux de valuation discrète *contenant* R ;
(iii) $(*)_{\mathrm{sep}}$ impose une condition supplémentaire de séparabilité.

Lorsque (disons) $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont représentables, que f est séparé et que $\mathcal{X}_K$ est dense dans $\mathcal{X}$, $(*)$ revient à dire que f est propre. Dans ce cas – et certainement dans beaucoup d'autres – la restriction (ii) n'en est pas une ; de plus on peut alors prendre $F'=F$ dans (5.1.2) de sorte que $(*)$ équivaut à $(*)_{\mathrm{sep}}$. L'intérêt de $(*)_{\mathrm{sep}}$ apparaîtra plus loin, cf. (5.4). Les raisons pour lesquelles nous avons mis la restriction (ii) sont les suivantes : elle n'est pas gênante car on ne rencontrera la situation (5.1.1) que dans ce cas ; elle est utile car lorsque K est un corps de nombres, $(*)_{\mathrm{sep}}$ devient équivalente à $(*)$.

5.3. Proposition.

(i) *Les conditions* $(*)$ *et* $(*)_{\mathrm{sep}}$ *sont stables par changement de base et composition.*

(ii) *Soient* $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ *deux* 1*-morphismes de type fini de B-champs algébriques noethériens. On suppose que* $f_K : \mathcal{X}_K \longrightarrow \mathcal{Y}_K$ *est* surjectif. *Alors :*

(a) *si* $g \circ f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Z}$ *vérifie* $(*)$*, il en est de même de* g *;*
(b) *si* f_K *est* lisse *et si* $g \circ f$ *vérifie* $(*)_{\mathrm{sep}}$, g *vérifie* $(*)_{\mathrm{sep}}$.

(iii) *Soit* $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ *un* 1*-morphisme vérifiant* $(*)$*. Alors* f *vérifie* $(*)_{\mathrm{sep}}$ *dans chacun des cas suivants :*

(a) K *est un corps de nombres ;*
(b) *le 1-morphisme diagonal* $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ *est* non ramifié *;*
(c) $\mathcal{X}$ *et* $\mathcal{Y}$ *sont des champs de Deligne-Mumford.*

Preuve. (i) et (ii) sont laissés au lecteur ; (iii)(a) est trivial, et la condition (iii)(c) implique (iii)(b). Traitons le cas (iii)(b) : partant (puisque f vérifie $(*)$) d'un diagramme (5.1.2), cherchons à y remplacer F' par son plus grand sous-corps qui soit une extension séparable de F. On peut pour cela supposer que F est de caractéristique $p>0$ et, par changement de base, que $\mathcal{Y} = \mathrm{Spec}\,(\Lambda)$ et que le morphisme v du diagramme (5.1.1) est l'identité. Par dévissage on est ramené à supposer que, dans (5.1.2), $F' \subset F^{1/p}$ (de sorte que $\Lambda'^{p} \subset \Lambda$) et à montrer qu'alors u se prolonge en un objet de $\mathcal{X}(\Lambda)$. Notons déjà (pour le cas où Λ n'est pas excellent) que puisque f est de présentation finie, un argument de limite inductive permet de remplacer Λ' par une sous-Λ-algèbre (plate et) de type fini, donc *finie* (de même corps des fractions

F', et évidemment toujours contenue dans $F^{1/p}$; le fait qu'alors Λ' n'est plus nécessairement un anneau de Dedekind n'aura pas d'inconvénient dans la suite).

Cette précaution prise, posons :

$$\Lambda'' = \Lambda' \otimes_\Lambda \Lambda', \qquad V'' = \operatorname{Spec} \Lambda'' = V' \times_V V',$$
$$F'' = F' \otimes_F F', \qquad U'' = \operatorname{Spec} F'' = U' \times_U U'.$$

Tous ces schémas sont plats et quasi-finis sur Λ, et en particulier noethériens. D'autre part, comme Λ' est radiciel sur Λ, le fermé diagonal Δ de V'' a pour espace sous-jacent V'' (et son idéal dans V'' est nilpotent).

Considérons l'objet x' de $\mathscr{X}(V')$ donné par la flèche oblique de (5.1.2), et ses deux images réciproques x_1'' et x_2'' sur V'' par les deux projections. Posons $I = \underline{\mathrm{Isom}}_{V''}(x_1'', x_2'')$: c'est un espace algébrique de type fini et séparé sur V'', et l'on dispose d'une section $\sigma_{U''}$ de I au-dessus de U'', à savoir la donnée de descente pour F'/F déduite du fait que $x' \circ i'$ provient de $u \in \operatorname{ob} \mathscr{X}(F)$. Enfin l'hypothèse (iii)(b) de l'énoncé assure que I est *non ramifié* sur V''.

Supposons que l'on puisse prolonger $\sigma_{U''}$ en une section σ de I sur V''. Alors σ sera automatiquement une donnée de descente parce que $U' \times_U U' \times_U U'$ est schématiquement dense dans $V' \times_V V' \times_V V'$ et que I est séparé. Puisque $\mathscr{X}$ est un champ pour la topologie fppf (remarque 1.1(ii), cf. [L-MB], (10.7)), et que le morphisme $V' \to V$ est fppf, cette donnée de descente sera effective, d'où l'objet de $\mathscr{X}(V) = \mathscr{X}(\Lambda)$ cherché.

Montrons donc l'existence de σ. Outre $\sigma_{U''} \in I(U'')$, on dispose aussi, trivialement, d'une section σ_0 de I sur le fermé diagonal Δ de V'', section qui coïncide avec $\sigma_{U''}$ sur $U'' \cap \Delta$. Comme I est non ramifié, σ_0 est un isomorphisme de Δ sur un ouvert fermé J_0 de $I \times_{V''} \Delta$ (cf. [EGA IV], (17.4.9)). Comme $I \times_{V''} \Delta$ a même espace sous-jacent que I, on voit donc qu'il existe un sous-espace ouvert (et fermé) J de I dont l'espace sous-jacent est J_0 , et que σ_0 se factorise par J. Il suffit donc pour conclure de voir que $J \to V''$ est une immersion fermée (car ce sera alors un isomorphisme au-dessus de U'' puisqu'elle y a une section, donc un isomorphisme puisque U'' est schématiquement dense dans V''). Or comme J_0 est isomorphe à Λ' c'est un schéma affine et il en est donc de même de J ([K], III, Theorem 3.3). La conclusion résulte donc du fait élémentaire suivant : si $\varphi : \Lambda'' \to C$ est un morphisme d'anneaux et N un idéal nilpotent de Λ'' tel que $\Lambda'' \to C/NC$ soit surjectif, alors φ est surjectif. □

L'intérêt des conditions (*) et $(*)_{\mathrm{sep}}$ apparaît dans le résultat suivant :

5.4. Proposition. *Soit* $\mathcal{S} = (\mathcal{X} \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \mathbf{\Omega})$ *une donnée de Skolem (complète ou non). Alors* $\mathcal{S}$ *admet un point entier dans chacun des cas suivants :*

(i) f *vérifie* $(*)_{\rm sep}$;

(ii) f *vérifie* $(*)$ *et* $L_v = \overline{K}_v$ *pour tout* $v \in \Sigma$.

Preuve. Supposant $\mathcal{S}$ complète, choisissons un point b de $B^{(1)}$. La donnée de Skolem sur $B - \{b\}$ déduite de $\mathcal{S}$ par restriction est incomplète et admet donc un point entier. Quitte à étendre K (en passant à un corps de rationalité de ce point entier) on peut supposer qu'il existe un ensemble fini T de points de $B^{(1)}$, et un objet x' de $\mathcal{X}(B')$ (avec $B' = B - T$) qui définit un point entier de la restriction de $\mathcal{S}$ à B'.

Plaçons-nous d'abord dans le cas (ii). Comme f vérifie (*), il existe une extension finie K_1 de K telle que, pour chaque $b \in T$, x se prolonge en un objet de $\mathcal{X}$ sur la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_{B,b}$ dans K_1. On en déduit par recollement un objet de $\mathcal{X}$ sur le normalisé de B dans K_1, qui est un point entier de $\mathcal{S}$.

Dans le cas (i), l'argument qui précède est insuffisant parce que l'extension K_1 trouvée n'est pas nécessairement $\mathbb{L}$-décomposée. Pour chaque $b \in T$, notons Λ_b le complété de $\mathcal{O}_{B,b}$ et K_b son corps des fractions. Comme f vérifie $(*)_{\rm sep}$, x se prolonge en un objet de $\mathcal{X}$ sur la fermeture intégrale Λ'_b de Λ_b dans une extension *finie séparable* K'_b de K_b.

Il suffit maintenant, pour prouver 5.4, de trouver une extension finie M de K vérifiant les deux conditions suivantes :

(a) M est décomposée en chaque $v \in \Sigma$;

(b) pour tout $b \in T$, la K_b-algèbre $K_b \otimes_K M$ est un produit de copies de l'extension K'_b construite ci-dessus.

En effet l'objet de $\mathcal{X}$ déduit de x par changement de base sur le normalisé de B' dans M se prolonge, vu la condition (b), en un objet de $\mathcal{X}$ sur le complété en chaque point au-dessus de T, et l'on conclut par 1.4.

Or l'existence de M résulte d'un argument classique d'approximation : soit N le ppcm des entiers $[K'_b : K_b]$ pour $b \in T$, et posons $E_b = (K'_b)^{N/[K'_b:K_b]}$ pour $b \in T$, et $E_v = K_v^N$ pour $v \in \Sigma$. Alors E_v (pour $v \in T \cup \Sigma$) est une K_v-algèbre finie étale de degré N, et est donc de la forme $K_v[X]/(P_v)$ où P_v est un polynôme séparable unitaire de degré N. Comme K_v est hensélien, si Q_v est un polynôme séparable unitaire de degré N suffisamment proche de P_v (au sens de la valuation de K_v), les K_v-algèbres étales E_v et $K_v[X]/(Q_v)$ sont isomorphes ([Ri], prop. 8 p. 195 et cor. 1 p. 197). Le théorème d'approximation faible fournit donc un polynôme $Q \in K[X]$ tel que, pour tout $v \in T \cup \Sigma$, la K_v-algèbre $K_v[X]/(Q)$ soit isomorphe à E_v. Il suffit dès lors de prendre pour M l'un des facteurs de la K-algèbre étale $K[X]/(Q)$. $\square$

5.4.1. Remarque. Comme le montre la preuve, il suffit en fait qu'il existe un point b de $B^{(1)}$ tel que le morphisme induit par f au-dessus de Spec $\mathcal{O}_{B,b}$ vérifie (*), resp. $(*)_{\text{sep}}$.

5.5. Proposition. *Soit* $\mathcal{S} = (\mathcal{X} \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \mathbf{\Omega})$ *une donnée de Skolem (complète ou non). On suppose donnés un K-espace algébrique* propre X_K *et un K-morphisme* surjectif $\pi_K \colon X_K \longrightarrow \mathcal{X}_K$. *Alors* $\mathcal{S}$ *admet un point entier dans chacun des cas suivants :*

(i) *K est un corps de nombres;*

(ii) $L_v = \overline{K}_v$ *pour tout* $v \in \Sigma$ *;*

(iii) $\mathcal{X}$ *est un champ de Deligne-Mumford ;*

(iv) π_K *est lisse.*

Preuve. Comme $\mathcal{X}$ est de présentation finie, il existe un ouvert non vide B' de B tel que π se prolonge en un B'-morphisme surjectif (et lisse, dans le cas (iv)) π : $X' \longrightarrow \mathcal{X}'$, où X' est un B'-espace algébrique propre, et où $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_B B'$. Par élargissement de Σ (3.3), on peut supposer que $B = B'$. Comme $X \longrightarrow B$ est représentable et propre il vérifie $(*)_{\text{sep}}$ et il résulte donc de 5.3 (ii) que f vérifie (*), et même $(*)_{\text{sep}}$ dans le cas (iv). Comme $(*)_{\text{sep}}$ résulte de (*) dans les cas (i) et (iii) d'après 5.3 (iii), on conclut par 5.4. □

5.6. Exemple. Le corollaire s'applique notamment lorsque $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford propre sur B; on sait même dans ce cas qu'il existe un schéma X et un 1-morphisme *fini surjectif* de X sur $\mathcal{X}$, cf. [L-MB], (16.6).

Un autre exemple important dans les applications est celui de certains champs quotients d'espaces algébrique propres :

5.6.1. Corollaire. *Soient* X_K *un K-espace algébrique* propre *sur K,* G_K *un K-schéma en groupes de type fini opérant sur* X_K , $\mathcal{X}_K$ *le K-champ quotient* $[X_K / G_K]$. *On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes :*

(i) *K est un corps de nombres;*

(ii) $L_v = \overline{K}_v$ *pour tout* $v \in \Sigma$ *;*

(iii) G_K *est lisse sur K.*

Alors toute donnée de Skolem de fibre générique $\mathcal{X}_K$ *admet un point entier.* □

Dans le cas non nécessairement propre, on a encore le critère utile suivant, généralisant [MB 3], §3 :

5.7. Proposition. *Soient X_K un K-schéma* projectif, *U_K un ouvert de X_K contenant tous les points de codimension ≤ 1 de X_K. Alors toute donnée de Skolem de fibre générique U_K admet un point entier.*

Preuve. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{U} \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \mathbf{\Omega})$ une telle donnée de Skolem. Nous supposerons $\mathcal{S}$ *séparable*, laissant au lecteur le soin, dans le cas contraire, de procéder aux aménagements nécessaires, ou de vérifier que l'argument de 3.1 s'applique. On suppose de plus $\mathcal{U}$ intègre. Quitte à restreindre B et à élargir Σ, on peut supposer que $\mathcal{U} = U$ est un ouvert d'un B-schéma X projectif et plat, contenant les points de codimension ≤ 1 de chaque fibre de X sur B. Procédons alors par récurrence sur la dimension n de X_K. Si $n \leq 1$, alors $U = X$ est propre sur B et l'on applique 5.6.1. Si $n \geq 2$, on cherche une hypersurface Y dans X telle que l'hypothèse de récurrence puisse s'appliquer à $U \cap Y$. Pour cela on procède de la façon suivante (les détails fastidieux sont omis) : on choisit un fermé réduit Z de U, plat, quasi-fini et surjectif sur B : c'est donc l'adhérence de Z_K, ensemble fini de points fermés de U_K que l'on suppose de plus contenu dans l'ouvert de lissité de U_K. On suppose aussi que $Z_{\overline{K}}$ rencontre toutes les composantes irréductibles de $U_{\overline{K}}$, et que pour tout $v \in \Sigma$, $Z(L_v)$ rencontre $\Omega_v \cap C$ pour toute composante irréductible C de U_{K_v}.

Par des arguments « à la Bertini », il existe alors un diviseur réduit Y_K de X_K, contenant Z_K et lisse au voisinage de Z_K, ne contenant aucune composante de $X_K - U_K$, et tel que pour chaque composante irréductible C de $X_{\overline{K}}$, $C \cap Y_{\overline{K}}$ soit irréductible. Si Y désigne l'adhérence de Y_K dans X, et si l'on pose $V = Y \cap U$ et, pour tout $v \in \Sigma$, $\Omega'_v = \Omega_v \cap Y(L_v)$, alors on vérifie qu'avec les conditions imposées, $\mathcal{S}' = (V \to B, \mathbb{L}, \mathbf{\Omega}')$ est une donnée de Skolem vérifiant les conditions de la proposition avec $\dim V_K = n - 1$, et qu'évidemment tout point entier de $\mathcal{S}'$ est un point entier de $\mathcal{S}$, d'où la récurrence. □

Enfin, on peut combiner les critères précédents à l'aide de dévissages tels que celui-ci :

5.8. Proposition. *Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{X} \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \mathbf{\Omega})$ une donnée de Skolem ; soient $\mathcal{Y}$ un B-champ algébrique plat et de type fini et $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un B-morphisme. On suppose que $\mathcal{X}$ est réduit et que :*

(i) *π est surjectif et vérifie* $(*)_{\text{sep}}$ *;*

(ii) $\pi_K : \mathcal{X}_K \to \mathcal{Y}_K$ *est à fibres géométriquement irréductibles ;*

(iii) π_K *est lisse sur un ouvert dense de* $\mathcal{X}_K$ *;*

(iv) *toute donnée de Skolem sur* $\mathcal{Y} \to B$ *admet un point entier.*

Alors $\mathcal{S}$ *admet un point entier.*

Preuve.

On peut supposer d'après (iii) que chaque Ω_v est contenu dans l'ouvert de lissité de π_K. Alors $W_v := \pi(\Omega_v)$ est un ouvert Zariski-dense de $\mathcal{Y}(L_v)$ pour tout $v \in \Sigma$. La surjectivité de π implique alors facilement que ($\mathcal{Y} \to B$, $\mathbb{L}$, $\boldsymbol{W}$) est une donnée de Skolem, où $\boldsymbol{W}$ désigne le produit des W_v. Celle-ci admet d'après (iv) un point entier x, à valeurs dans une R-algèbre R_1. Remplaçant R par R_1, nous supposerons que $x \in \mathcal{Y}(R)$. Définissons un B-champ algébrique $\mathcal{X}_1$ par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "x"] & \mathcal{Y}. \end{tikzcd}$$

Le morphisme π_1 est surjectif et vérifie $(*)_{\text{sep}}$; il n'est pas nécessairement plat mais, si l'on désigne par $\pi_2 : \mathcal{X}_2 \to B$ l'adhérence schématique de la fibre générique de π_1, alors π_2 est plat, et vérifie encore $(*)_{\text{sep}}$ donc est surjectif (il suffit de remarquer que $\mathcal{X}_{2,K} = \mathcal{X}_{1,K}$ est non vide donc a un point à valeurs dans une extension finie L de K, et d'appliquer $(*)_{\text{sep}}$ aux anneaux locaux du normalisé de B dans L). Chaque Ω_v induit dans $\mathcal{X}_2(L_v)$ un ouvert $\Omega_{2,v}$, non vide vu le choix de x et contenu dans l'ouvert de lissité de $\mathcal{X}_{2,K}$ donc Zariski-dense à cause de la condition (ii). Notant $\boldsymbol{\Omega}_2$ le produit des $\Omega_{2,v}$ on voit que ($\mathcal{X}_2 \to B$, $\mathbb{L}$, $\boldsymbol{\Omega}_2$) est une donnée de Skolem (on utilise ici la condition (ii) pour vérifier 0.4(b) et 0.5(b)). Comme π_2 vérifie $(*)_{\text{sep}}$ on conclut par 5.4. □

5.8.1. Remarque. L'énoncé qui précède admet évidemment des variantes. Par exemple, si $L_v = \overline{K}_v$ pour tout $v \in \Sigma$, on peut supprimer l'hypothèse (iii) et remplacer $(*)_{\text{sep}}$ par $(*)$ dans (i).

On peut aussi remplacer la condition (i) par les deux suivantes :

(a) π est surjectif et universellement générisant (par exemple surjectif et plat) ;

(b) pour toute extension finie K' de K et tout $x \in \mathscr{Y}(K')$, toute donnée de Skolem (sur la fermeture intégrale de R dans K') de fibre générique $\mathscr{X}_x = \mathscr{X} \times_{\pi,\mathscr{Y},x} \mathrm{Spec}\,(K')$ admet un point entier.

Le principe de la démonstration est le même ; l'hypothèse (a) assure que, avec les notations de la preuve ci-dessus, π_2 est encore surjectif.

5.9. Corollaire. *Soit* $\mathscr{S} = (\mathscr{X} \xrightarrow{f} B, \mathbb{L}, \boldsymbol{\Omega})$ *une donnée de Skolem, où* $\mathscr{X}$ *est :*

- *soit le* B*-champ* $\mathscr{M}_{g,B}$ *des courbes lisses (projectives, géométriquement connexes) de genre* $g \geq 3$ *donné ;*
- *soit le* B*-champ* $\mathscr{A}_{g,B}$ *des schémas abéliens principalement polarisés de dimension (relative) donnée* $g \geq 2$.

Alors $\mathscr{S}$ *admet un point entier.*

Preuve. Dans les deux cas, $\mathscr{X}$ admet un *schéma de modules grossier* $X \to B$, qui est un B-schéma de type fini muni d'un B-morphisme surjectif $\pi : \mathscr{X} \to X$ vérifiant toutes les conditions de 5.8 (la condition (iv) résulte de 5.7 et de l'existence de la compactification de Satake-Baily-Borel de $\mathscr{A}_g$; voir [C-F] pour l'existence de cette dernière en toute caractéristique). □

5.9.1. Remarque. On s'est limité dans 5.9 au cas principalement polarisé faute de référence pour la compactification (définie sur K) d'espaces de modules plus généraux.

6. L'exemple des torseurs.

6.1. Dans tout ce paragraphe les notations sont celles de 0.2 et 0.3 ; on suppose de plus que $L_v = K_v$ pour tout $v \in \Sigma$.

On se donne un B-espace algébrique en groupes G. On suppose que G est plat, séparé et de type fini, et que sa fibre générique G_K est lisse. On a un diagramme canonique d'ensembles pointés

(6.1.2) $$\mathrm{H}^1(R^\Sigma, G) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^1(K^\Sigma, G) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^1(\mathbb{L} \otimes_K K^\Sigma, G)$$

qui est d'ailleurs limite inductive filtrante des diagrammes naturels

(6.1.3) $$\mathrm{H}^1(R', G) \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{H}^1(K', G) \xrightarrow{\beta'} \mathrm{H}^1(\mathbb{L} \otimes_K K', G)$$

où K' parcourt les extensions finies de K contenues dans K^Σ, et où R' désigne la fermeture intégrale de R dans K' (en particulier la K-algèbre $\mathbb{L} \otimes_K K'$ est isomorphe à $\prod_{v \in \Sigma} K_v^{[K':K]}$).

Nous aurons à considérer l'hypothèse d'incomplétude habituelle :

(HI) il existe une place de K n'appartenant pas à $B^{(1)} \cup \Sigma$.

6.2. Théorème.

(i) *Les applications* α *et* β *de* (6.1.2) *sont surjectives.*

(ii) β *est bijective dans chacun des cas suivants :*

(ii a) G_K *est connexe ;*

(ii b) G *est commutatif et, pour tout* $v \in \Sigma$, $G(K_v)$ *est Zariski-dense dans* G_{K_v}.

(iii) *On suppose que le morphisme structural* $G \to B$ *vérifie la condition* (b) *de* 0.4, *et que* (HI) *est vérifiée. Alors* α *est bijective.*

Preuve. Pour montrer la surjectivité de β, on se donne une extension finie de K contenue dans K^Σ (et que, changeant les notations, l'on peut supposer égale à K) et pour chaque $v \in \Sigma$ un G-torseur X_v sur K_v. On considère le B-champ

$$\mathscr{X} = [B/G]$$

de 1.5 ; c'est un B-champ algébrique plat et surjectif, à fibres géométriquement irréductibles et à fibre générique lisse. Pour chaque $v \in \Sigma$, posons $\Omega_v = \mathrm{Iso}(X_v) \subset \mathscr{X}(K_v)$ (cf. 2.4.1 (iii)). Alors ($\mathscr{X}_K \to \mathrm{Spec}\,(K)$, $\mathbb{L}$, $\mathbf{\Omega}$) est une donnée de Skolem, trivialement incomplète ; appliquant 0.7, on en déduit un G-torseur sur K^{Σ} induisant X_v aux places au-dessus de v, pour chaque v, d'où la conclusion.

Montrons que α est surjective. Comme ci-dessus, on peut supposer donné un G-torseur X sur K, qu'il s'agit de prolonger à R^{Σ}. Bien entendu, il se prolonge déjà en un G-torseur X_U sur un ouvert dense U de B, complémentaire d'un nombre fini de points. Si b désigne l'un d'eux, il suffit de trouver une extension finie K' de K contenue dans K^{Σ} telle que le torseur envisagé se prolonge sur l'anneau local de chaque place b' de K' au-dessus de b. Il suffit même, d'après 1.4, qu'il se prolonge sur le complété (ou, si l'on préfère, l'hensélisé) de cet anneau local, ce qui sera évidemment le cas s'il est *trivial* sur le complété de K' en b'. Or, puisque G_K est lisse, X est trivialisé par une extension finie séparable L_b du complété K_b de K en b ; par approximation faible, il existe une extension K' de K décomposée au-dessus de Σ et telle que $K'\otimes_K K_b$ soit isomorphe à L_b , d'où la conclusion.

L'assertion (ii) va résulter d'un lemme un peu plus précis :

6.2.1. Lemme. *Sous les hypothèses de la partie* (iii) *de* 6.2*, on suppose de plus que, pour tout* $v\in\Sigma$*,* $G(K_v)$ *est Zariski-dense dans* G_{K_v}*. Alors* α *et* β *sont à noyau trivial.*

Preuve. Comme on sait déjà que α est surjectif, il suffit de voir que le noyau de $\beta\circ\alpha$ est trivial. On est immédiatement ramené à montrer que tout G-torseur X sur R qui est trivial sur chaque K_v ($v\in\Sigma$) est trivial sur R^{Σ}. Or, vu nos hypothèses, X est un B-espace algébrique qui vérifie les conditions de 0.4 ; de plus, pour tout $v\in\Sigma$, $X(K_v)$ est Zariski-dense dans X_{K_v} (puisque ce dernier est isomorphe à G_{K_v} comme K_v-espace algébrique). D'après 0.7, $X(R^{\Sigma})$ est donc non vide, cqfd. □

Compte tenu de (i), ce lemme entraîne évidemment (ii) : si X et X' sont deux G-torseurs sur K, isomorphes sur chaque K_v , il suffit d'appliquer le lemme, avec $R=K$, au faisceau des G-isomorphismes de X sur Y, qui est comme on l'a déjà vu (cf. 2.4.1 (iii)) un torseur sur une forme intérieure G' de G : dans les deux cas envisagés, G' a encore la propriété que $G'(K_v)$ est Zariski-dense dans G'_{K_v}. (Dans le cas (ii b) on peut aussi dire, tout simplement, que β est un morphisme de groupes).

Pour montrer (iii), il suffit encore de voir qu'un G-torseur X sur R qui est trivial sur K est trivial sur R^{Σ}, les conditions de 0.4 étant conservées lorsque l'on remplace G par une forme tordue ; notons de plus que X vérifie lui aussi ces conditions. Le choix d'un isomorphisme de X_K sur G_K détermine un ouvert fermé X_K^0 de X_K (correspondant à la composante neutre G_K^0 de G_K). L'adhérence X^0 de X_K^0 dans X est une réunion de composantes irréductibles de X ; d'après la condition (b) de 0.4,

X^0 est donc surjectif sur B. Par construction, la fibre générique de X^0 est lisse et géométriquement connexe, et a des points K_v-rationnels. On peut donc conclure de 0.7, ou même de [MB 2], que X^0, donc aussi X, a une section sur R^Σ. □

6.3. Remarques. Gardons les hypothèses du théorème 6.2.

6.3.1. Dans l'assertion (i) du théorème, on peut obtenir directement la surjectivité de $\beta \circ \alpha$ en considérant la donnée de Skolem ($\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}\,(R)$, $\mathbb{L}$, $\mathbf{\Omega}$) (si elle est complète, il suffit de remarquer que 5.6.1 s'applique).

6.3.2. Si G_K est connexe et si (HI) est vérifiée, alors (ii) et (iii) s'appliquent, de sorte que α et β sont bijectives.

6.3.3. Sous les hypothèses du lemme 6.2.1, il n'est pas vrai en général que β soit injective. Par exemple, prenons $K = \mathbb{Q}$ et $\Sigma = \{\infty\}$: alors $K^\Sigma = \mathbb{Q}^{\mathrm{tr}}$. Si j désigne une racine cubique primitive de 1, alors $K_1 := \mathbb{Q}(2^{1/3}, j)$ et $K_2 := \mathbb{Q}(3^{1/3}, j)$ sont deux extensions galoisiennes de groupe $_3$ de $\mathbb{Q}$; il est clair que $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} K_1$ et $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} K_2$ sont isomorphes, mais $\mathbb{Q}^{\mathrm{tr}} \otimes_{\mathbb{Q}} K_1$ et $\mathbb{Q}^{\mathrm{tr}} \otimes_{\mathbb{Q}} K_2$ ne le sont pas.

6.3.4. Dans l'assertion (iii) du théorème, on ne peut se passer de l'hypothèse (HI), même si G est commutatif à fibres connexes. Voici un exemple. On fixe un entier impair $m > 1$ et, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on considère

$$\Gamma_a = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[X, Y] / (m(X^2 + Y^2) + 2X - a)$$

et le morphisme

$$\begin{aligned} \mu_a : \Gamma_0 \times \Gamma_a &\longrightarrow \Gamma_a \\ ((x, y), (x', y')) &\longmapsto (x + x' + m(xx' - yy'),\ y + y' + m(xy' + x'y)). \end{aligned}$$

Alors μ_0 fait de Γ_0 un $\mathbb{Z}$-schéma en groupes commutatif, affine, plat, à fibres connexes, et lisse sur $\mathbb{Z}[1/2]$, et μ_a fait de Γ_a un Γ_0-torseur sur Spec $\mathbb{Z}$. Pour $a \geq 0$ ce torseur a des points totalement réels (avec $X = 0$, par exemple), mais un calcul simple montre que si $0 < a < m - 2$, alors l'équation $m(x^2 + y^2) + 2x = a$ n'a pas de solution avec x et y entiers algébriques totalement réels (comme $m \nmid a$, le cas $x = 0$ est exclu, de sorte que x doit avoir un conjugué réel ξ de valeur absolue ≥ 1, et l'équation donne alors $a \geq m\xi^2 + 2\xi \geq m - 2$).

(Pour trouver cet exemple, on est parti du $\mathbb{Z}$-schéma en groupes U_1 représentant les éléments de norme 1 de l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, et du U_1-torseur U_d des éléments de norme d, pour d entier. L'application $(x, y) \longmapsto 1 + m(x + iy)$ induit alors un morphisme de Γ_a dans U_{1+am} respectant les structures homogènes, et qui est un isomorphisme sur $\mathbb{Z}[1/m]$; ainsi, si A est un anneau dans lequel m n'est pas diviseur de zéro, $\Gamma_a(A)$ s'identifie à l'ensemble des éléments de $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[i]$ qui sont de norme $1+am$ et congrus à 1 modulo m).

6.3.5. Lorsque G est un groupe fini ordinaire, la surjectivité de β dans (6.1.2) assure l'existence d'une K^{Σ}-algèbre L galoisienne de groupe G (i.e. dont le spectre est un G-torseur, mais L n'est pas nécessairement un corps) avec structure locale donnée aux places au-dessus de Σ.

Dans cette direction, rappelons [MB 3] que tout groupe fini est un groupe de Galois sur un sous-corps de K^{Σ}, avec structure locale donnée en Σ.

Il existe ([P], Theorem 3) un théorème de structure pour le groupe de Galois absolu de K^{Σ} (généralisant [F-H-V] qui traite le cas où $K^{\Sigma} = \mathbb{Q}^{\mathrm{tr}}$).

Je remercie O. Gabber pour ses nombreuses remarques, ainsi que l'Institute for Advanced Study (Princeton) où une partie de ce travail a été effectuée.

Références :

[A] M. ARTIN, Versal Deformations and Algebraic Stacks, *Invent. Math.* **27**, 165–189 (1974)

[B-L-R] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT et M. RAYNAUD, *Néron Models,* Ergebnisse vol. 21, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1990

[C-F] C.-L. CHAI et G. FALTINGS, *Degeneration of Abelian Varieties,* Ergebnisse vol. 22, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1990

[C-R] D. CANTOR et P. ROQUETTE, On Diophantine equations over the ring of all algebraic integers, *J. Number Theory* **18**, 1–26 (1984)

[D-D] P. DÈBES et B. DESCHAMPS, The Regular Inverse Galois Problem over Large Fields, dans *Geometric Galois Actions* (L. Schneps et P. Lochak, éd.), London Math. Soc. Lecture Notes Series **243**, 119–138 : Cambridge University Press, 1997

[D-M] P. DELIGNE et D. MUMFORD, The Irreducibility of the Space of Curves of Given Genus, *Pub. Math. I.H.E.S.* **36**, 75–110 (1969)

[E] O. ENDLER, *Valuation Theory,* Universitext, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1972

[F-H-V] M. FRIED, D. HARAN et H. VÖLKLEIN, Absolute Galois group of the totally real numbers, *C.R. Acad. Sci. Paris* **317**, 995–999 (1993)

[EGA IV] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Eléments de Géométrie Algébrique,* chap. IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (quatrième partie), *Pub. math. IHES* **32** (1967)

[F-R] D. FERRAND et M. RAYNAUD, Fibres formelles d'un anneau local noethérien, *Ann. Sci. E.N.S.* **3**, 295–311 (1970)

[G-P-R] B. GREEN, F. POP et P. ROQUETTE, On Rumely's Local-Global Principle, *Jahresbericht der DMV* **97**, 43–74 (1995)

[K] D. KNUTSON, *Algebraic Spaces,* LNM vol. 203, Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1971

[L-MB] G. LAUMON et L. MORET-BAILLY, *Champs algébriques,* Ergebnisse der Mathematik **39**, Berlin-Heidelberg-New York : Springer (1999).

[MB 1] L. MORET-BAILLY, Groupes de Picard et problèmes de Skolem I, *Ann. Sci. E.N.S.* **22**, 161–179 (1989)

[MB 2] L. MORET-BAILLY, Groupes de Picard et problèmes de Skolem II, *Ann. Sci. E.N.S.* **22**, 181–194 (1989)

[MB 3] L. MORET-BAILLY, Extensions de corps globaux à ramification et groupe de Galois donnés, *C.R. Acad. Sci. Paris* **311**, 273–276 (1990)

[MB 4] L. MORET-BAILLY, Un problème de descente, *Bull. Soc. Math. France* **124** , 559–585 (1996)

[P] F. POP, Embedding problems over large fields, *Ann. of Math.* **114**, 1–34 (1996)

[Ri] P. RIBENBOIM, *Théorie des valuations,* Presses de l'Université de Montréal, 1968

[Ru 1] R. RUMELY, Arithmetic over the ring of all algebraic integers, *J. für die reine u. angew. Math.* **368**, 127–133 (1986)

[Ru 2] R. RUMELY, *Capacity Theory on Algebraic Curves,* LNM vol. 1378, Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1989

[Sh] I.R. SHAFAREVICH, *Basic Algebraic Geometry,* Grundlehren vol. 213, Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1974