

R-équivalence simultanée de toiseurs : un complément à l'article de P. Gille *

Laurent Moret-Bailly †

IRMAR (Institut de Recherche Mathématique de Rennes, UMR 6625 du CNRS)

Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex

moret@univ-rennes1.fr

<http://www.maths.univ-rennes1.fr/~moret/>

Résumé

Si K est un corps fertile (« large field ») et G un groupe fini, on montre que toute famille finie de G -toiseurs sur K , qui sont R-équivalents, s'obtient par spécialisation à partir d'un G -toiseur géométriquement irréductible sur un ouvert de \mathbb{P}_K^1 . Ceci répond notamment à une question de P. Gille [Gi]. Les énoncés sont ensuite reformulés en termes de R-équivalence de points rationnels sur les variétés de la forme $\mathrm{GL}_{r,K}/G$.

Abstract

If K is a “large” field and G is a finite group, we show that any finite family of R-equivalent G -torsors over K is obtained by specialization from a geometrically irreducible G -torsor over an open subset of \mathbb{P}_K^1 . This answers a question of P. Gille [Gi]. The results are also stated in terms of R-equivalence of rational points on varieties of the form $\mathrm{GL}_{r,K}/G$.

AMS 2000 subject classification: 11S15, 11S25, 12G05, 12E30, 14H30.

*Accepted for publication in *Journal of Number Theory* as of January 23, 2001.

†L'auteur est membre du réseau TMR « Arithmetic Algebraic Geometry » (contrat ERB FMRX 960006).

Si K est un corps local non archimédien, à corps résiduel fini, et si G est un groupe fini d'ordre premier à la caractéristique résiduelle de K , alors P. Gille montre dans [Gi] que tout G -torseur X sur K est R -équivalent au toseur trivial, et demande si deux G -torseurs quelconques sont élémentairement R -équivalents, *i.e.* proviennent par spécialisation d'un G -torseur sur un ouvert de \mathbb{P}_K^1 . Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi, et que l'on obtient même ainsi tous les G -torseurs simultanément :

THÉORÈME 1 — *Soit K un corps local non archimédien, à corps résiduel fini de caractéristique p , et soit G un groupe fini d'ordre non divisible par p . Alors il existe un ouvert U de \mathbb{P}_K^1 et un G -torseur $V \rightarrow U$, avec V géométriquement irréductible sur K , tels que l'application naturelle*

$$U(K) \longrightarrow H^1(K, G)$$

déduite de V soit surjective.

De façon plus générale, un corps K est dit *fertile* si, pour tout K -schéma lisse connexe X , l'ensemble $X(K)$ est vide ou dense dans X . Cette notion a été introduite par F. Pop sous le nom de « large field » ; voir [CT] et [MB] pour des exemples et des applications. Il est immédiat que, sous les hypothèses du théorème 1, K est fertile ; d'autre part $H^1(K, G)$ est fini. Compte tenu du théorème 1 de [Gi], cité plus haut, notre théorème 1 résulte donc du

THÉORÈME 2 — *Soient K un corps fertile, G un K -schéma en groupes fini étale, $n \in \mathbb{N}$, et X_1, \dots, X_n des G -torseurs sur K qui sont R -équivalents entre eux. Alors il existe un ouvert U de \mathbb{P}_K^1 , un G_U -torseur $f : V \rightarrow U$, où V est géométriquement irréductible sur K , et des points rationnels $x_1, \dots, x_n \in U(K)$ tels que, pour chaque i , le G -torseur X_i soit isomorphe à $f^{-1}(x_i)$.*

Démonstration. Quitte à augmenter n on peut supposer que, pour chaque $i \leq n - 1$, les toseurs X_i et X_{i+1} sont élémentairement R -équivalents : il existe donc un G -revêtement (ramifié) $f_i : C_i \rightarrow \Gamma_i = \mathbb{P}_K^1$ induisant X_i en 0 et X_{i+1} en ∞ , où C_i est une K -courbe projective normale et génériquement lisse. De plus, d'après [MB], théorème 1.1 (ou [CT], Theorem 1, si K est de caractéristique nulle et G constant), on sait qu'il existe $f_n : C_n \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ induisant X_n en 0, avec C_n lisse géométriquement irréductible. On construit alors une courbe Γ_0 de genre 0 à singularités ordinaires en identifiant le point ∞ de Γ_i au point 0 de Γ_{i+1} ($1 \leq i \leq n - 1$), et un G -revêtement $f_0 : C_0 \rightarrow \Gamma_0$ par recollement des C_i (via les isomorphismes $f_i^{-1}(\infty) \xrightarrow{\sim} X_{i+1} \xrightarrow{\sim} f_{i+1}^{-1}(0)$). Noter que chaque X_i apparaît comme fibre de f_0 en un point *lisse* $\varepsilon_i \in \Gamma_0(K)$ (il apparaît une infinité de fois comme fibre de f_i , puisque K est fertile). De plus C_0 est géométriquement connexe puisque sa composante C_n l'est, et qu'elle est connectée à toutes les autres.

Par déformation on construit alors un diagramme, à carré commutatif, de K -schémas réduits de type fini

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{V} & \hookrightarrow & \mathcal{C} \\
\downarrow f_{\mathcal{U}} & & \downarrow f \\
\mathcal{U} & \hookrightarrow & \Gamma \\
\swarrow e_i (1 \leq i \leq n) & & \downarrow \\
& & s \in S
\end{array}$$

dans lequel :

- (i) S est une courbe affine lisse connexe sur K , et $s \in S(K)$;
- (ii) Γ et \mathcal{C} sont des S -courbes projectives et plates, et f est un morphisme fini et plat ;
- (iii) G opère sur \mathcal{C} par Γ -automorphismes ;
- (iv) le K -morphisme $f_s : \mathcal{C}_s \rightarrow \Gamma_s$ est isomorphe (avec l'action de G) à $f_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \Gamma_0$ construit ci-dessus ;
- (v) \mathcal{U} est un ouvert de Γ dense dans chaque fibre ;
- (vi) $\mathcal{V} = f^{-1}(\mathcal{U})$, et \mathcal{V} est un G -torseur au-dessus de \mathcal{U} ;
- (vii) Γ est lisse au-dessus de $S - \{s\}$;
- (viii) les e_i ($1 \leq i \leq n$) sont des sections de \mathcal{U} sur S , et $e_i(s) = \varepsilon_i$;
- (ix) si x est un point singulier de \mathcal{C}_s , le schéma $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{C},x}) - \{x\}$ est régulier.

Pour cela on procède d'abord comme dans [MB], § 5 (reposant sur les résultats de [H-S]) pour obtenir un diagramme similaire où S est remplacé par $\text{Spec } K[[t]]$; on invoque ensuite le théorème d'approximation d'Artin, comme dans le théorème 2.7 de [MB]. Comme le lecteur le constatera, la seule différence — qui n'affecte pas la construction — avec la situation de [MB] est qu'ici les courbes normales \mathcal{C}_i ne sont pas nécessairement lisses aux points de ramification de f_0 , de sorte que \mathcal{C}_0 n'est pas une « courbe nodale » au sens de *loc. cit.*

Les conditions ci-dessus impliquent que les fibres de Γ sur $S - \{s\}$ sont des droites projectives (elles sont de genre 0 et ont un point rationnel) et que celles de \mathcal{C} sont géométriquement connexes (puisque \mathcal{C}_0 l'est). De plus la condition (ix) s'étend à tous les points fermés x de \mathcal{C}_s : en effet, si x est un point régulier dans \mathcal{C}_s , alors \mathcal{C}_s induit au voisinage de x un diviseur de Cartier régulier, donc x est un point régulier de \mathcal{C} . Il en résulte que la fibre générique de \mathcal{C} sur S est *régulière*, et donc *géométriquement irréductible* : elle est irréductible puisque connexe et régulière, et elle conserve ces propriétés par extension séparable du corps de base, ce qui suffit. Quitte à restreindre S , on peut donc supposer que les fibres de \mathcal{C} , sauf \mathcal{C}_s , sont géométriquement irréductibles. En particulier, pour tout $t \in S(K)$ distinct de s , \mathcal{V}_t est géométriquement irréductible sur K (et lisse, car étale sur \mathcal{U}_t).

Pour chaque i on dispose, par restriction de f à la section e_i , d'un G -torseur $T_i \rightarrow S$ qui induit X_i au point s . Comme K est fertile il existe donc $t \in S(K)$, distinct de s , tel que pour chaque i la fibre de T_i en t soit isomorphe à X_i . Le G -torseur $\mathcal{V}_t \rightarrow \mathcal{U}_t$ répond à la question. ■

Les corollaires suivants nous ont été signalés par Jean-Louis Colliot-Thélène ; le premier n'est qu'une reformulation du théorème 1 en termes de R-équivalence sur certains espaces homogènes :

COROLLAIRE 1 — Sous les hypothèses du théorème 1, soient $r \in \mathbb{N}$ et $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_{r,K}$ un morphisme injectif. Notons X le K -schéma quotient $\mathrm{GL}_{r,K}/G$. Alors il existe une courbe (affine) K -rationnelle $U \subset X$ telle que l'application

$$\mathrm{GL}_r(K) \times U(K) \rightarrow X(K)$$

déduite de l'action de $\mathrm{GL}_{r,K}$ sur X soit surjective. ■

Sur les corps fertiles, on déduit du théorème 2 un énoncé de « R-équivalence élémentaire simultanée » dans les espaces homogènes de la forme GL_r/G :

COROLLAIRE 2 — Soient K un corps fertile, n et $r \in \mathbb{N}$, et G un sous-groupe fini étale de $\mathrm{GL}_{r,K}$. Notons X le K -schéma quotient $\mathrm{GL}_{r,K}/G$. Soient $P_1, \dots, P_n \in X(K)$. Supposons que P_1, \dots, P_n soient R-équivalents dans X . Alors il existe un ouvert U de \mathbb{P}_K^1 et un morphisme $\varphi : U \rightarrow X$ tels que tous les P_i appartiennent à $\varphi(U(K))$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si T est un K -schéma, la donnée d'un élément de $X(T)$ équivaut à celle (à isomorphisme près) d'un G -torseur $T' \rightarrow T$ muni d'une trivialisatation du $\mathrm{GL}_{r,T}$ -torseur $T' \times^G \mathrm{GL}_r$.

Les données fournissent donc en particulier des G -torseurs X_1, \dots, X_n sur K , qui sont R-équivalents vu l'hypothèse sur les P_i . Le théorème 2 fournit donc un G -torseur V sur un ouvert U de \mathbb{P}_K^1 , induisant les X_i en des points Q_i de $\mathbb{P}^1(K)$. Le $\mathrm{GL}_{r,U}$ -torseur $W := V \times^G \mathrm{GL}_r \rightarrow U$ est en outre muni d'un point rationnel R_i au-dessus de chaque Q_i , et le problème consiste simplement à trouver, quitte à restreindre U , une section de W passant par les R_i , ce qui est élémentaire puisque W est trivial sur l'anneau semi-local des Q_i et que $\mathrm{GL}_{r,K}$ est un ouvert d'espace affine. ■

L'auteur remercie Jean-Louis Colliot-Thélène et Philippe Gille pour leurs remarques.

Références

- [CT] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, *Rational connectedness and Galois covers of the projective line*, Ann. of Math. 151 (2000), 359-373.
- [Gi] P. GILLE, *R-équivalence sur les G -revêtements sur les corps locaux non archimédiens*, J. Number Theory (2001).
- [H-S] D. HARBATER et K. F. STEVENSON, *Patching and Thickening Problems*, J. Algebra 212 (1999), 272-304.
- [MB] L. MORET-BAILLY, *Construction de revêtements de courbes pointées*, J. of Algebra (2001) (à paraître).