GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Un théorème de pureté pour les familles de courbes lisses.* Note de **Laurent Moret-Bailly**, présentée par Jean-Pierre Serre.

Une famille de courbes lisses de genre $\geqq 1$, paramétrée par un ouvert U d'un schéma régulier S, se prolonge à S si la codimension de $S-U$ est $\geqq 2$.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — A purity theorem for families of smooth curves.

A family of smooth curves of genus $\geqq 1$, *parametrized by an open subset* U *of a regular scheme* S, *extends to* S *if* $S-U$ *has codimension* $\geqq 2$.

Tous les schémas considérés sont supposés localement noethériens. Pour tout schéma S on note $\mathscr{C}(S)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des S-schémas formée des morphismes $f: X \to S$ *propres, lisses* et surjectifs dont les fibres géométriques ont pour composantes connexes des courbes de genre $\geqq 1$.

THÉORÈME. — *Soit* U *un ouvert dense d'un schéma* régulier S.

(i) *Le foncteur naturel de restriction :*

$$F: \quad \mathscr{C}(S) \to \mathscr{C}(U)$$

est pleinement fidèle.

(ii) *Si* U *contient tous les points de codimension* 1 *de* S, *alors le foncteur* F *ci-dessus est une équivalence de catégories.*

Si X et Y sont deux objets de $\mathscr{C}(S)$, on a une bijection naturelle $\mathrm{Hom}_S(X, Y) \to \mathrm{Hom}_X(X, X \times_S Y)$, de sorte que (i) se réduit (en remplaçant S par X) au lemme suivant :

LEMME 1. — *Sous les hypothèses du théorème, soit* $Y \in \mathscr{C}(S)$. *Alors l'application naturelle* $Y(S) \to Y(U)$ *est bijective.*

L'injectivité est évidente; on montre la surjectivité en plongeant Y dans son schéma de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ et en remarquant que, Y étant régulier, tout faisceau inversible sur $Y \times_S U$ se prolonge à Y.

Plaçons-nous désormais sous les hypothèses de (ii) et considérons un objet X_U de $\mathscr{C}(U)$, qu'il s'agit de prolonger à S. Il résulte, par descente, de la pleine fidélité de F que la question est locale sur S pour la topologie étale et l'on peut même supposer, par passage à la limite, que $S = \mathrm{Spec}\, R$, où R est local régulier strictement hensélien de dimension $\geqq 2$, et que U est le complémentaire du point fermé s de S. Le théorème de pureté de Zariski-Nagata ([1], [5]) implique que tout revêtement étale de U est trivial; il en est donc ainsi de la factorisation de Stein de $f_U : X_U \to U$, ce qui nous ramène au cas où les fibres de f_U sont *géométriquement connexes* de genre $g \geqq 1$. Le même théorème montre que, pour l premier inversible dans R, le faisceau l-adique $R^1 f_{U*} \mathbf{Z}_l$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}_l)_U^{2g}$, de sorte que l'on peut munir X_U d'une structure de niveau $n \geqq 3$.

Commençons par traiter le cas $g=1$. La jacobienne $J_U := \underline{\mathrm{Pic}}^0_{X_U/U}$ de X_U, convenablement rigidifiée, correspond à un morphisme de U dans le schéma de modules $M_{1,n}$ des courbes elliptiques avec structure de niveau n. Or on sait que $M_{1,n}$ est *affine*, de sorte que ce morphisme se factorise par $\mathrm{Spec}\, H^0(U, \mathcal{O}_U) = S$, et que J_U se prolonge en une courbe elliptique J sur S (*cf.* [4], remarque 4.7). D'autre part la courbe X_U s'identifie à un torseur sous J_U, projectif sur U donc d'ordre fini ([8], XIII, § 2), i. e. provenant d'un torseur P_U sous le noyau ${}_mJ_U$ de la multiplication par m dans J_U, pour $m \geqq 1$ convenable.

0249-6321/85/03000489 $ 2.00

Le lemme suivant montre alors que P_U se prolonge en un torseur sous ${}_mJ$, d'où un torseur sous J qui est le prolongement cherché de X_U.

LEMME 2. — *Soit* G *un* S-*schéma en groupes fini et plat. Le foncteur de restriction de la catégorie des* G-*torseurs sur* S *vers celle des* G_U-*torseurs sur* U, *est une équivalence de catégories.*

Dans le cas « galoisien » où G est constant, ce lemme n'est autre que le théorème de pureté; la démonstration de [1] s'adapte au cas général.

Supposons désormais X_U à fibres géométriquement connexes de genre $g \geqq 2$, et munie d'une structure de niveau $n \geqq 3$. Notons φ_U le morphisme correspondant de U dans le schéma de modules $M_{g,n}$ des courbes de genre g avec structure de niveau n : il s'agit de prolonger φ_U à S. Par descente fidèlement plate on peut supposer l'anneau R complet à corps résiduel algébriquement clos. Nous allons ramener la démonstration au cas où R est de dimension 2, en procédant par récurrence sur dim R.

Supposons donc dim $R \geqq 3$ et soit $\pi \in R$ un paramètre régulier. Pour $k \geqq 0$, posons $R_k = R/\pi^{k+1} R$, $S_k = \operatorname{Spec} R_k$, $U_k = U \cap S_k$. Il existe, par hypothèse de récurrence, un $X'_0 \xrightarrow{f'_0} S_0 \in \mathscr{C}(S_0)$ prolongeant $X_U \times_U U_0$. Montrons qu'il existe, pour tout $k \geqq 1$, un $X'_k \in \mathscr{C}(S_k)$ et un système compatible d'isomorphismes :

$$X'_{k+1} \times_{S_{k+1}} S_k \xrightarrow{\sim} X'_k,$$

$$X'_k \times_{S_k} U_k \xrightarrow{\sim} X_U \times_U U_k.$$

En effet, si $T_{Y/Z}$ désigne le fibré tangent relatif de $Y \in \mathscr{C}(Z)$, on a $f'_{0*} T_{X'_0/S_0} = 0$, et $R^1 f'_{0*} T_{X'_0/S_0}$ est libre sur S_0, de sorte que, par la suite spectrale de Leray, $H^1(f_0'^{-1}(U_0), T_{X'_0/S_0})$ s'identifie à $H^1(X'_0, T_{X'_0/S_0})$. On déduit des X'_k, puisque R est complet, un morphisme :

$$\varphi : \quad S \to M_{g,n}$$

tel que $\varphi_{\mid U_k} = \varphi_{U \mid U_k}$, ce qui entraîne que $\varphi_{\mid U} = \varphi_U$.

Il reste à traiter le cas où dim $R = 2$. Pour tout schéma T, notons $\bar{\mathscr{M}}_g(T)$ le groupoïde des courbes stables de genre g sur T [2], et $\mathscr{M}_g(T)$ [resp. $\mathscr{M}'_g(T)$] la sous-catégorie pleine de $\bar{\mathscr{M}}_g(T)$ formée des courbes lisses (resp. des courbes X telles que $\underline{\operatorname{Pic}}^0_{X/T}$ soit un schéma abélien). On sait (*loc. cit.*) que $\mathscr{M}_g$ et $\bar{\mathscr{M}}_g$ sont des champs algébriques, et l'on a des immersions ouvertes $\mathscr{M}_g \subset \mathscr{M}'_g \subset \bar{\mathscr{M}}_g$, de sorte que $\mathscr{M}'_g$ est aussi un champ algébrique. Pour tout $n \geqq 1$ on a une notion évidente de structure de niveau n pour les objets de $\mathscr{M}'_g$; les objets munis d'une telle structure forment un champ $\mathscr{M}'_{g,n}$ fini étale sur $\mathscr{M}'_g \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[1/n]$. En fait $\mathscr{M}'_{g,n}$ est, pour $n \geqq 3$, un *espace algébrique :* on vérifie en effet que ses objets n'ont pas d'automorphismes non triviaux.

Si $Y \xrightarrow{f} T$ est une courbe stable sur un schéma T, notons Sing(f), ou Sing(Y/T), le lieu singulier relatif de f, muni de sa structure de sous-schéma fermé de Y défini par l'idéal de Fitting convenable du faisceau $\Omega^1_{Y/T}$.

LEMME 3. — *Soit* $f: Y \to T$ *comme ci-dessus. Alors* Sing(f) *est fini et non ramifié sur* T, *et est localement défini par deux équations dans* Y. *En particulier,* Sing(f) *est de codimension* $\leqq 2$ *dans* Y.

Cela résulte en effet de la description locale, donnée dans [2], § 1, de la déformation formelle universelle d'une courbe stable.

Ce lemme montre d'abord qu'il suffit de prolonger X_U en une courbe *stable* X sur S : en effet celle-ci sera automatiquement lisse. Considérons dans $\mathscr{M}'_{g,n}$ l'adhérence Γ du graphe de $\varphi_U : U \to \mathscr{M}_{g,n} \subset \mathscr{M}'_{g,n}$: c'est un S-espace algébrique birationnel sur S, et de plus :

LEMME 4. — Γ *est propre sur* S.

En effet, si T est un trait de point générique η et si $h : T \to S$ est un morphisme tel que $h(\eta) \in U$, il s'agit de voir que $X_\eta := T \times_S X_U$ se prolonge en un objet de $\mathscr{M}'_{g,n}(T)$. Or nous avons vu que le module de Tate l-adique de $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X_U/U}$ est constant pour l premier inversible sur S; par suite la variété abélienne $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X_\eta/\eta}$ a bonne réduction sur T.

Comme S est régulier de dimension 2, il existe un S-morphisme $\tilde{S} \to \Gamma$, où $\tilde{S} \xrightarrow{\pi} S$ est composé d'une suite finie d'éclatements de points fermés. On dispose sur $\tilde{S}$ d'un objet $\tilde{X} \in \mathscr{M}'_{g,n}(\tilde{S})$ prolongeant $\pi^* X_U$. Soit $E \simeq \mathbf{P}^1_k$ le diviseur exceptionnel du dernier éclatement de la suite π : il suffit de prouver que la restriction de $\tilde{X}$ à E est constante. Or E rencontre le reste de la fibre $\pi^{-1}(s)$ en au plus deux points x et y; d'autre part, d'après le lemme 3, $\mathrm{Sing}(\tilde{X}/\tilde{S})$ est purement de dimension 1, de sorte que les points isolés de $\mathrm{Sing}(\tilde{X}_E/E)$ sont au-dessus de x et y. La fibration $\tilde{X}_E \to E$ est donc justiciable du lemme suivant, qui achève la démonstration :

LEMME 5. — *Soit k un corps algébriquement clos et soit* $f : Y \to \mathbf{P}^1_k$ *une* $\mathbf{P}^1_k$*-courbe stable de genre* $\geqq 2$, *à jacobienne propre, telle que si* $Z \subset Y$ *désigne l'ensemble des points isolés de* $\mathrm{Sing}(f)$, *on ait* $\mathrm{Card}\, f(Z) \leqq 2$. *Alors la fibration f est triviale.*

En effet, puisque $\mathbf{P}^1_k$ est simplement connexe, $\mathrm{Sing}(f)$ est réunion de Z et d'un nombre fini de sections disjointes de f. Le normalisé de Y est donc une somme disjointe de $\mathbf{P}^1_k$-schémas Y_i munis de sections E_{ij} $(1 \leqq j \leqq r(i))$, et l'on retrouve Y en identifiant les E_{ij} par paires. Il s'agit de voir que, pour chaque i, le $\mathbf{P}^1_k$-schéma pointé $(Y_i, (E_{ij})_{j=1,\ldots,r(i)})$ est constant (ou même seulement constant sur un ouvert non vide de $\mathbf{P}^1_k$, en vertu de l'unicité du modèle stable). Comme chaque Y_i a au plus deux fibres singulières, le cas où Y_i est de genre $\geqq 2$ résulte de [9], III, § 4, théorème 4. Les composantes de genre 1 ont leur modèle minimal lisse sur $\mathbf{P}^1_k$ (à cause de l'hypothèse sur la jacobienne) et muni d'au moins une section, donc sont des courbes elliptiques sur $\mathbf{P}^1_k$: une telle courbe est constante. Enfin, si Y_i est de genre 0, on a $r(i) \geqq 3$, et l'on vérifie facilement qu'une courbe lisse de genre 0 sur $V := \mathbf{P}^1_k - \{x, y\}$, munie de $r \geqq 3$ sections disjointes, est V-isomorphe à $V \times_k \mathbf{P}^1_k$ munie de r sections constantes.

Remarque 1. — Il est possible que l'hypothèse sur la jacobienne dans le lemme 5 soit superflue; elle n'est utilisée que pour traiter les composantes de genre 1.

Remarque 2. — L'assertion de pleine fidélité (i) est encore valable (comme on le voit sur la démonstration) si l'on remplace l'hypothèse de régularité par la suivante, plus faible : pour tout $X \in \mathscr{C}(S)$, les anneaux locaux de X au-dessus des points de $S - U$ sont factoriels. Il est vraisemblable que cette condition est vérifiée dès que les anneaux strictement locaux de S aux points de $S - U$ sont factoriels.

D'autre part, si l'on se limite aux courbes dont les composantes des fibres géométriques sont de genre $\geqq 2$, et aux morphismes *finis* (ou *plats*, ce qui revient au même d'après [6], 11.3.10), on obtient un énoncé de pleine fidélité analogue à (i) en supposant seulement que les anneaux locaux de S aux points de $S - U$ sont *géométriquement unibranches* (par exemple *normaux*).

Remarque 3. — L'analogue de notre théorème pour les *schémas abéliens* est vrai en caractéristique nulle ([4], corollaire 4.5), faux en caractéristique positive, même dans le cas principalement polarisé (*loc. cit.*, remarque 4.6, et [9], VIII). Rappelons à ce propos la question suivante :

Question. — Soient S un schéma normal, $U \subset S$ un ouvert dense, A_U un U-schéma abélien. On suppose que $S-U$ est de caractéristique $p>0$, et que le groupe p-divisible de A_U se prolonge à S. Existe-t-il un S-schéma abélien prolongeant A_U?

La réponse est en tout cas affirmative lorsque les points maximaux de S sont de caractéristique nulle : comme suggéré dans *loc. cit.*, 4.9, on se ramène au cas où S est un trait, démontré dans [7] à l'aide du théorème de Tate sur les morphismes de groupes p-divisibles.

Remarque 4. — L'analogue du théorème pour les courbes stables est faux : à partir d'une courbe stable non constante sur $\mathbf{P}^1$ on construit par projection une courbe stable sur le plan affine privé d'un point, non prolongeable au plan.

Remarque 5. — Pour tout corps k il existe un k-schéma normal de type fini S, un ouvert U de S contenant les points de codimension 1, et un objet X_U de $\mathscr{C}(U)$, à fibres géométriquement connexes de genre $\geqq 4$, non prolongeable à S, dont la jacobienne relative se prolonge en un S-schéma abélien : on remarque pour cela que le morphisme de Torelli de $\mathscr{M}'_{g,n}$ dans le schéma de modules des variétés abéliennes principalement polarisées a des fibres de dimension >0.

Remarque 6. — I. Dolgachev a démontré dans [3] des résultats de pureté pour le lieu de non-lissité d'un morphisme $f: X \to Y$ de variétés lisses sur un corps, dont la fibre générique est une courbe lisse.

L'auteur tient à remercier M. Raynaud et L. Szpiro pour leurs remarques durant l'élaboration de ce travail.

Remise le 4 février 1985.

Références bibliographiques

[1] M. Auslander, On the purity of the branch locus, *Amer. J. Math.*, 84, 1962, p. 116-125.

[2] P. Deligne et D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, *Pub. Math. I.H.E.S.*, n° 36, 1969.

[3] I. V. Dolgachev, On the purity of the degeneration loci of families of curves, *Invent. Math.*, 8, 1969, p. 34-54.

[4] A. Grothendieck, Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens, *Invent. Math.*, 2, 1966, p. 59-78.

[5] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA 2), Masson, Paris, North Holland.

[6] A. Grothendieck et J. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique IV (troisième partie), *Pub. Math. I.H.E.S. n°* 28, 1966.

[7] A. Grothendieck et coll., Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7 I), *Springer Lecture Notes n°* 288, 1972.

[8] M. Raynaud, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, *Springer Lecture Notes n°* 119, 1970.

[9] L. Szpiro et coll., Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, *Astérisque n°* 86.

Département de Mathématique, Bât. n° 425,
Université de Paris-Sud, 91405 *Orsay Cedex*.