

# Une construction d'extensions faiblement non ramifiées d'un anneau de valuation

Laurent Moret-Bailly<sup>\*†‡</sup>

21 mai 2022

Paru dans *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **147** (2022), 139-151  
<https://doi.org/10.4171/rsmup/94>

## Abstract

Given a valuation ring  $V$ , with residue field  $F$  and value group  $\Gamma$ , we give a sufficient condition for a local ring dominating  $V$  to be a valuation ring with the same value group. When  $V$  contains a field  $k$ , we apply this result to the problem of constructing a valuation ring  $W$  containing  $V$  and a prescribed extension  $k'$  of  $k$ , with value group  $\Gamma$  and residue field generated by  $k'$  and  $F$ ; this is possible in particular when either  $k'$  or  $F$  is separable over  $k$ .

## Résumé

Étant donné un anneau de valuation  $V$ , de corps résiduel  $F$  et de groupe des valeurs  $\Gamma$ , on donne une condition suffisante pour qu'un anneau local dominant  $V$  soit un anneau de valuation de groupe  $\Gamma$ . Lorsque  $V$  contient un corps  $k$ , ce résultat est appliqué à la construction d'un anneau de valuation contenant  $V$  et une extension donnée  $k'$  de  $k$ , de groupe  $\Gamma$  et de corps résiduel engendré par  $k'$  et  $F$ . Cela s'avère possible, notamment, lorsque  $k'$  ou  $F$  est séparable sur  $k$ .

*Classification AMS 2010* : 13F30, 12J10.

---

<sup>\*</sup>Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 Rennes, France

<sup>†</sup>`laurent.moret-bailly[AT]univ-rennes1.fr`

<sup>‡</sup>L'auteur a bénéficié du soutien du projet Geolie (ANR-15-CE 40-0012) de l'Agence nationale de la recherche.

# 1 Introduction

Si  $V$  est un anneau de valuation, une  $V$ -algèbre  $W$  est une *extension faiblement non ramifiée* de  $V$  si  $W$  est un anneau de valuation dominant  $V$  et de même groupe des valeurs que  $V$ . Le principal résultat de ce travail est le suivant (théorème 4.1) :

**Théorème A.** *Soit  $V$  un anneau de valuation, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , et soit  $W$  une  $V$ -algèbre locale et plate, d'idéal maximal  $\mathfrak{n}$ . On suppose que :*

- (i)  $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}W$  ;
- (ii)  $W$  est la colimite d'un système inductif filtrant  $(R_i)_{i \in I}$  de  $V$ -algèbres plates essentiellement de type fini, dont les morphismes de transition  $u_{i,j} : R_i \rightarrow R_j$  ( $i \leq j$ ) sont plats.

Alors  $W$  est une extension faiblement non ramifiée de  $V$ .

La démonstration figure au §4. On se ramène facilement au cas où  $W = A_{\mathfrak{p}}$  où  $A$  est une  $V$ -algèbre plate de type fini et où  $\mathfrak{p}$  est un point maximal de  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$ . Par localisation étale, grâce à un résultat de Gruson et Raynaud, on peut même supposer que  $A$  est un  $V$ -module libre et que  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}A$ . Dans ce cas, on construit explicitement la valuation associée à  $W$  à partir de la « norme » naturelle sur le  $V$ -module libre  $A$ .

Le théorème A est ensuite appliqué au problème suivant, qui a motivé ce travail (à partir de questions liées au critère valuatif de propreté et aux variétés « pseudo-complètes », voir [7]) : on part d'un anneau de valuation  $V$ , de corps résiduel  $F$  et contenant un corps  $k$ . On donne de plus une extension  $k'$  de  $k$ . Il s'agit de construire un anneau de valuation dominant  $V$  et contenant  $k'$ , dont le corps résiduel et le groupe des valeurs soient « aussi proches que possible » de ceux de  $V$ , compte tenu de ces contraintes. Le résultat le plus utile est alors le suivant (théorème 6.2, dont l'énoncé est plus précis) :

**Théorème B.** *Avec les notations précédentes, on suppose de plus que l'anneau  $k' \otimes_k F$  est réduit. Alors il existe une extension faiblement non ramifiée  $W$  de  $V$  contenant  $k'$  et dont le corps résiduel  $F_1$  est une extension composée de  $k'$  et  $F$  sur  $k$  ; de plus on peut imposer que  $F_1$  soit séparable sur  $F$  (resp. sur  $k'$ ) si  $k'$  (resp.  $F$ ) est séparable sur  $k$ .*

Pour construire  $W$ , on part de l'anneau  $V' := k' \otimes_k V$ , et l'on choisit un idéal premier minimal  $\bar{\mathfrak{p}}$  de  $V'/\mathfrak{m}V' = k' \otimes_k F$ . Si  $\mathfrak{p}$  est l'idéal premier de  $V'$  correspondant, on pose  $W = V'_{\mathfrak{p}}$ . Il est alors facile de vérifier que le théorème A s'applique à  $W$ , la condition (i) utilisant l'hypothèse que  $k' \otimes_k F$  est réduit.

**Remarque 1.1.** Les théorèmes A et B sont faciles lorsque  $V$  est un anneau de valuation discrète : on utilise le fait que tout anneau local noethérien dont l'idéal maximal est engendré par un élément régulier est un anneau de valuation discrète. La preuve de ce cas particulier du théorème B est contenue dans celle de [3, Proposition C.1.1].

Sans supposer  $k' \otimes_k F$  réduit, on obtient un peu moins (théorème 6.3, plus précis) :

**Théorème C.** *Les notations sont celles du théorème B, sans l'hypothèse sur  $k' \otimes_k F$  ; on note  $p$  l'exposant caractéristique de  $k$  et  $\Gamma$  le groupe de  $V$ .*

*Alors il existe un anneau de valuation  $W$  dominant  $V$  et contenant  $k'$ , avec les propriétés suivantes, où  $\Delta$  désigne le groupe de  $W$  et  $F_1$  son corps résiduel :*

- (i) le groupe  $\Delta/\Gamma$  est de  $p$ -torsion ;
- (ii)  $F_1$  est radiciel sur son sous-corps engendré par  $k'$  et  $F$ .

*Plan de l'article.* Le §2 donne des rappels sur les valuations. Au §3 on étudie la norme naturelle sur un  $V$ -module libre (dans toute la suite,  $V$  désignera un anneau de valuation) puis sur une  $V$ -algèbre libre comme  $V$ -module ; le résultat final (proposition 3.2.4), bien que tout à fait élémentaire, est essentiel pour la preuve du théorème principal. Ce dernier est établi au §4, où figure aussi une autre démonstration, indiquée par H. Knaf, du fait que (sous les hypothèses du théorème A)  $W$  est un anneau de valuation. Le §5 traite des propriétés de certaines extensions composées dites « (strictement) maximales », qui apparaissent naturellement dans la preuve du théorème B. Au §6 on démontre les théorèmes 6.2 et 6.3, dont les théorèmes B et C sont des sous-produits.

*Conventions.* Les anneaux sont commutatifs et unitaires. Si  $x$  est un point d'un schéma  $X$ , on note  $\mathcal{O}_{X,x}$  son anneau local et  $\kappa(x)$  son corps résiduel.

*Remerciements.* L'auteur remercie Hagen Knaf pour ses commentaires et en particulier pour les énoncés 3.2.3 et 4.2.1.

## 2 Valuations : généralités

### 2.1 Notations et conventions

On utilise la notation multiplicative pour les valuations. Si  $(\Gamma, \leq)$  est un groupe abélien (multiplicatif) totalement ordonné, on note  $\bar{\Gamma}$  le monoïde  $\Gamma \cup \{0\}$  où  $0 \cdot \gamma = 0$  et  $0 \leq \gamma$  pour tout  $\gamma \in \bar{\Gamma}$ . Une valuation  $v$  sur un corps  $K$ , à valeurs dans  $\Gamma$ , est un morphisme de monoïdes  $v : (K, \times) \rightarrow \bar{\Gamma}$ , qui sera plutôt noté  $z \mapsto |z|_v$  ou simplement  $z \mapsto |z|$ , vérifiant  $|0| = 0$ ,  $|K^\times| \subset \Gamma$ , et  $|z + t| \leq \max\{|z|, |t|\}$  pour tous  $z$  et  $t$  dans  $K$ . L'*anneau* de  $v$  est la « boule unité »  $V = \{z \in K : |z| \leq 1\}$  et son *groupe* est l'image de  $K^\times$  par  $v$ , qui s'identifie au quotient  $K^\times/V^\times$  ; en général, ce groupe sera supposé égal à  $\Gamma$ .

Pour les propriétés générales des valuations, nous renvoyons à [1], chapitre 6 (qui utilise la notation additive).

### 2.2 Extensions faiblement non ramifiées

Si  $V$  est un anneau de valuation, une *extension* de  $V$  est un morphisme  $j : V \rightarrow W$  où  $W$  est un anneau de valuation et où  $j$  est injectif et local. Une telle extension induit un morphisme injectif et croissant de groupes totalement ordonnés  $|j| : \Gamma \hookrightarrow \Delta$  entre les groupes associés. Nous dirons que  $j$  est *faiblement non ramifié* (terminologie de [10, Tag 0ASG]) si  $|j|$  est un isomorphisme.

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $V$  un anneau de valuation.*

- (1) *Le hensélisé de  $V$  est une extension faiblement non ramifiée de  $V$ .*
- (2) *Si  $j : V \rightarrow W$  est une extension faiblement non ramifiée de  $V$ , l'application naturelle  $\mathfrak{P} \mapsto j^{-1}(\mathfrak{P})$  est un homéomorphisme de  $\text{Spec}(W)$  sur  $\text{Spec}(V)$  ; son inverse est donné par  $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}W$ .*

(3) Soit  $W$  une  $V$ -algèbre qui est réunion filtrante d'extensions faiblement non ramifiées de  $V$ . Alors  $V \rightarrow W$  est une extension faiblement non ramifiée.

*Démonstration.* (Détails laissés au lecteur) Pour (1), voir [10, Tag 0ASK] ou [4, Remark 6.1.12 (vi)]. La partie (2) découle facilement du dictionnaire entre idéaux d'un anneau de valuation et sous-groupes du groupe associé, et la partie (3) est immédiate.  $\square$

### 3 Algèbres libres sur un anneau de valuation

On fixe un anneau de valuation  $V$ , de corps des fractions  $K$ , d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , de corps résiduel  $F = V/\mathfrak{m}$ , de groupe  $\Gamma = K^\times/V^\times$ ; conformément aux conventions du §2, on notera  $|z| \in \bar{\Gamma}$  la valuation de  $z \in K$ .

#### 3.1 Norme sur un $V$ -module libre

Soit  $E$  un  $V$ -module libre, vu comme un sous- $V$ -module de  $E_K := K \otimes_V E$ . Si  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$  est une  $V$ -base de  $E$  (donc une  $K$ -base de  $E_K$ ), et si  $z \in E_K$  s'écrit  $z = \sum_{i \in I} z_i e_i$ , où les  $z_i$  sont dans  $K$ , on pose  $\|z\|_E := \max_{i \in I} |z_i| \in \bar{\Gamma}$ .

**Proposition 3.1.1.** (1) Pour tout  $z \in E_K$ , on a  $\|z\|_E = \min\{|\alpha| : \alpha \in K, z \in \alpha E\}$ . En particulier  $\|z\|_E$  est indépendant du choix de  $\mathcal{B}$ .

(2) Pour  $z, z'$  dans  $E_K$  et  $\alpha$  dans  $K$ , on a les propriétés suivantes :

- (i)  $\|z + z'\|_E \leq \max(\|z\|_E, \|z'\|_E)$  ;
- (ii)  $\|z\|_E = 0 \Leftrightarrow z = 0$  ;
- (iii)  $\|z\|_E \leq 1 \Leftrightarrow z \in E$  ;
- (iv)  $\|z\|_E < 1 \Leftrightarrow z \in \mathfrak{m}E$  ;
- (v)  $\|\alpha z\|_E = |\alpha| \|z\|_E$ .

(3) Si  $E$  n'est pas nul, tout  $z \in E_K$  peut s'écrire  $z = \alpha z_1$  avec  $\alpha \in K$  et  $\|z_1\|_E = 1$  (de sorte que  $|\alpha| = \|z\|_E$ ).

(4) Soit  $b : E \times E' \rightarrow G$  une application  $V$ -bilinéaire, où  $E, E'$  et  $G$  sont des  $V$ -modules libres. Pour tout  $z \in E$  et tout  $z' \in E'$ , on a  $\|b(z, z')\|_G \leq \|z\|_E \|z'\|_{E'}$ .

La démonstration est laissée au lecteur (pour (4), on pourra remarquer que pour  $\alpha, \alpha' \in V$  on a  $b(\alpha E \times \alpha' E') \subset \alpha \alpha' G$ ).  $\square$

#### 3.2 Norme : le cas d'une $V$ -algèbre

Nous allons appliquer ce qui précède en prenant pour  $E$  une  $V$ -algèbre  $A$ , supposée non nulle et libre comme  $V$ -module; on identifie  $V$  à un sous-anneau de  $A$  par le morphisme structural. On pose  $A_K := K \otimes_V A$ ,  $\bar{A} := F \otimes_V A = A/\mathfrak{m}A$ . Pour  $z \in A_K$ , on notera simplement  $\|z\|$  l'élément  $\|z\|_A \in \bar{\Gamma}$ .

**Proposition 3.2.1.** (1) Pour tout  $\alpha \in K$ , on a  $\|\alpha\| = |\alpha|$ .

(2)  $A \cap K = V$ .

(3) Pour tous  $z$  et  $z'$  dans  $A_K$ , on a  $\|zz'\| \leq \|z\| \|z'\|$ .

(4) Pour tout  $z \in A^\times$ , on a  $\|z\| = 1$ .

*Démonstration.* (1) D'abord, comme  $A$  est  $V$ -libre et non nul, on a  $\bar{A} \neq 0$  et en particulier  $1 \in A \setminus \mathfrak{m}A$ . D'après 3.1.1 (2), (iii) et (iv), ceci implique que  $\|1\| = 1$ . Pour  $\alpha \in K$  quelconque, on a donc, appliquant 3.1.1 (2) (v),  $\|\alpha\| = \|\alpha \cdot 1\| = |\alpha| \|1\| = |\alpha|$ .

L'assertion (2) en résulte : si  $\alpha \in A \cap K$ , on a  $\|\alpha\| \leq 1$  donc  $|\alpha| \leq 1$ . Enfin, (3) est un cas particulier de 3.1.1 (4), et implique (4) puisque  $\|1\| = 1$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.2.** *Si  $\bar{A}$  est réduit,  $A$  est réduit.*

*Démonstration.* Soit  $z \in A$ ; écrivons  $z = \alpha z_1$  avec  $\alpha \in V$  et  $\|z_1\| = 1$ . Supposons  $z$  nilpotent et non nul. Alors  $\alpha \neq 0$ , donc  $z_1$  est nilpotent puisque  $\alpha$  est régulier dans  $A$ . Par suite  $\bar{z}_1$  est nilpotent dans  $\bar{A}$ , et n'est pas nul puisque  $\|z_1\| = 1$ , donc  $\bar{A}$  n'est pas réduit.  $\square$

Le corollaire 3.2.2 a la conséquence suivante, signalée par Hagen Knaf :

**Corollaire 3.2.3.** *On suppose que  $V$  contient un corps  $k$  tel que  $F$  soit séparable sur  $k$ . Alors, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $V$ , le corps résiduel  $\kappa(\mathfrak{p})$  est séparable sur  $k$ .*

*Démonstration.* Remplaçant  $V$  par  $V/\mathfrak{p}$ , on peut supposer que  $\mathfrak{p} = 0$  : il s'agit donc de montrer que l'extension  $K/k$  est séparable ou, de façon équivalente, que  $k' \otimes_k K$  est réduit pour toute extension  $k'$  de  $k$ . Fixons  $k'$  et posons  $V' = k' \otimes_k V$  : alors  $V'$  est une  $V$ -algèbre libre comme  $V$ -module, et  $V'/\mathfrak{m}V'$  s'identifie à  $k' \otimes_k F$  donc est réduit vu l'hypothèse sur  $F$ . On déduit alors de 3.2.2 que  $V'$  est réduit, donc que son localisé  $k' \otimes_k K$  l'est aussi.  $\square$

La proposition suivante généralise [4, Lemma 6.1.13] (qui traite le cas où  $A$  est un  $V$ -module de type fini) :

**Proposition 3.2.4.** *On suppose que  $\bar{A}$  est intègre. Alors  $A$  est intègre, et  $\|\cdot\|$  se prolonge en une valuation sur  $\text{Frac}(A)$ , prolongeant  $|\cdot|$ , de même groupe  $\Gamma$ , d'anneau  $A_{\mathfrak{m}A}$  et de corps résiduel  $\text{Frac}(\bar{A})$ .*

*Démonstration.* Soient  $z = \alpha z_1$  et  $u = \beta u_1$  non nuls dans  $A$ , avec  $\alpha, \beta \in V$  et  $\|z_1\| = \|u_1\| = 1$ . Alors  $\bar{z}_1$  et  $\bar{u}_1$  ne sont pas nuls dans  $\bar{A}$  d'après 3.1.1 (2) (iv), donc  $\bar{z}_1 \bar{u}_1 \neq 0$ . Ceci montre que  $zu \neq 0$  (donc  $A$  est intègre), mais aussi que  $\|z_1 u_1\| = 1$ , de sorte que  $\|zu\| = |\alpha\beta| = \|z\| \|u\|$ . Compte tenu des propriétés générales vues en 3.1.1, cela montre que  $\|\cdot\|$  se prolonge en une valuation sur  $\text{Frac}(A)$  (encore notée  $\|\cdot\|$ ), prolongeant  $|\cdot|$  et à valeurs dans  $\bar{\Gamma}$ .

Posons  $L = \text{Frac}(A) = \text{Frac}(A_K)$  et soit  $R = \{x \in L : \|x\| \leq 1\}$  l'anneau de  $\|\cdot\|$ . Il est clair que  $A \subset R$ . Posons  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}A = \{z \in A : \|z\| < 1\}$ . Si  $z \in A \setminus \mathfrak{p}$ , on a  $\|z\| = 1$ , donc  $z \in R^\times$  : ceci montre que  $A_{\mathfrak{p}} \subset R$ . Inversement, soit  $x \in R$  : écrivons  $x = \alpha z/u$  avec  $\alpha \in K$ ,  $z \in A$ ,  $u \in A$  et  $\|z\| = \|u\| = 1$  (donc  $z, u \in A \setminus \mathfrak{p}$ ). On a alors  $\|x\| = |\alpha| \leq 1$  donc  $\alpha z \in A$ , d'où  $x \in A_{\mathfrak{p}}$ . Ainsi,  $R = A_{\mathfrak{p}}$ , dont le corps résiduel est bien  $\text{Frac}(\bar{A})$ .  $\square$

## 4 Le théorème principal

**Théorème 4.1.** *Soit  $V$  un anneau de valuation, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , et soit  $W$  une  $V$ -algèbre locale d'idéal maximal  $\mathfrak{n}$ . On suppose que :*

- (i)  $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}W$  ;

- (ii)  $W$  est colimite d'un système inductif filtrant  $(W_i)_{i \in I}$  de  $V$ -algèbres plates essentiellement de type fini, dont les morphismes de transition  $u_{i,j} : W_i \rightarrow W_j$  ( $i \leq j$ ) sont plats.

Alors  $W$  est un anneau de valuation faiblement non ramifié sur  $V$ .

*Démonstration.*

a) *Réduction au cas hensélien.* Le hensélisé  $V^h$  de  $V$  est un anneau de valuation faiblement non ramifié sur  $V$  (2.2.1 (1)). Posons  $W' = V^h \otimes_V W$  : alors la  $V^h$ -algèbre  $W'$  vérifie encore (i) et (ii), et est une  $W$ -algèbre locale fidèlement plate ; si l'on montre que  $W'$  est un anneau de valuation faiblement non ramifié sur  $V^h$ , la même propriété en résultera pour  $V \hookrightarrow W$  par descente (noter en particulier que l'application  $J \mapsto JW'$  est une injection strictement croissante de l'ensemble  $\mathcal{S}$  des idéaux de  $W$  vers l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des idéaux de  $W'$ , de sorte que si  $\mathcal{S}'$  est totalement ordonné par inclusion il en est de même de  $\mathcal{S}$ ). Nous supposons donc dans la suite que  $V$  est hensélien.

b) *Réduction au cas essentiellement de type fini.* Pour tout  $i \in I$ , soit  $\mathfrak{n}_i \subset W_i$  l'image réciproque de  $\mathfrak{n}$  : remplaçant le système  $(W_i)$  par  $((W_i)_{\mathfrak{n}_i})$ , on peut supposer que chaque  $W_i$  est local et que les morphismes de transition  $u_{i,j}$  sont locaux (donc aussi les  $u_i : W_i \rightarrow W$ ) ; les  $u_{i,j}$  sont alors fidèlement plats et donc injectifs. Par 2.2.1 (3), il suffit de voir que chaque  $W_i$  est une extension faiblement non ramifiée de  $V$ . Or, par fidèle platitude, on a  $\mathfrak{m}W_i = \mathfrak{m}W \cap W_i = \mathfrak{n}_i$  pour tout  $i$ , donc  $W_i$  vérifie l'hypothèse (i) de l'énoncé ; nous sommes donc ramenés à montrer le cas particulier où  $W$  est lui-même une  $V$ -algèbre locale, plate et essentiellement de type fini, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}W$ .

c) *Fin de la démonstration.* On suppose donc que  $W = A_{\mathfrak{p}}$ , où  $A$  est une  $V$ -algèbre de type fini et  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$ . Soit  $J \subset A$  le sous- $V$ -module de torsion de  $A$ , qui est un idéal de  $A$  : alors  $JA_{\mathfrak{p}} = 0$  puisque  $W$  est plat sur  $V$ , donc  $W = (A/J)_{\mathfrak{p}}$  et l'on peut (remplaçant  $A$  par  $A/J$ ) supposer  $A$  plat sur  $V$ . Ceci implique que  $A$  est une  $V$ -algèbre de présentation finie, d'après [8, Theorem 3] (ou [9, Corollaire 3.4.7]).

Posons  $\overline{A} = A/\mathfrak{m}A$  et  $\overline{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/\mathfrak{m}A = \mathfrak{p}\overline{A}$  : alors  $\overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}} = W/\mathfrak{m}W$  est le corps résiduel de  $W$ , donc  $\overline{\mathfrak{p}}$  est un idéal premier minimal de  $\overline{A}$ , et  $\text{Spec}(\overline{A})$  est réduit au point  $\overline{\mathfrak{p}}$  ; comme  $\overline{A}$  est noethérien on peut, en localisant  $A$ , supposer que  $\overline{A}$  est intègre et que  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}A$ .

D'après [9, cor. 3.3.13], il existe  $f \in A \setminus \mathfrak{p}$  tel que  $A_f$  soit un  $V$ -module projectif (l'hypothèse hensélienne intervient ici). Puisque  $V$  est local,  $A_f$  est même libre ([6, Theorem 2], ou [10, Tag 0593]). Remplaçant  $A$  par  $A_f$ , nous sommes ramenés au cas où  $A$  est libre sur  $V$ , qui résulte de 3.2.4.  $\square$

**Remarque 4.1.1.** Si l'on affaiblit l'hypothèse (i) du théorème 4.1 en supposant seulement que  $\mathfrak{n} = \sqrt{\mathfrak{m}W}$  (autrement dit,  $\dim(W/\mathfrak{m}W) = 0$ ), on peut montrer, en utilisant les résultats de [8], que les fibres du morphisme canonique  $\pi : \text{Spec}(W) \rightarrow \text{Spec}(V)$  sont de dimension 0 ; de plus, si  $W$  est unibranche,  $\pi$  est un homéomorphisme.

## 4.2 La voie homologique

Les résultats de cette section nous ont été indiqués, pour l'essentiel, par Hagen Knaf. Si  $R$  est un anneau, nous noterons  $\text{fdim}(R) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  la *dimension faible* de  $R$ , définie comme la borne supérieure des tor-dimensions de tous les  $R$ -modules. On rappelle [5, Corollary 4.2.6] (ou [10, Tag092S]) qu'un anneau local  $R$  est un anneau de valuation si et seulement si  $\text{fdim}(R) \leq 1$ . Rappelons aussi qu'un anneau  $R$  est *cohérent* si tout idéal de type fini de  $R$  est de présentation finie comme  $R$ -module.

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $V$  un anneau de valuation, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , et soit  $W$  une  $V$ -algèbre locale et plate, d'idéal maximal  $\mathfrak{n}$ . On suppose que :*

- (i)  $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}W$  ;
- (ii)  $W$  est un anneau cohérent.

*Alors  $W$  est un anneau de valuation.*

*Démonstration.* Montrons que  $\text{fdim}(W) \leq 1$ . On a l'inégalité [5, Theorem 3.1.3]

$$\text{fdim}(W) \leq \text{fdim}(W/\mathfrak{n}) + \text{Tor-dim}_W(W/\mathfrak{n})$$

(valable dès que  $W$  est un anneau cohérent et  $\mathfrak{n}$  un idéal contenu dans le radical de  $W$ ). On a évidemment  $\text{fdim}(W/\mathfrak{n}) = 0$  puisque  $W/\mathfrak{n}$  est un corps. D'autre part, comme  $V$  est un anneau de valuation, on a  $\text{Tor-dim}_V(V/\mathfrak{m}) = 1$ , d'où

$$\text{Tor-dim}_W(W/\mathfrak{n}) = \text{Tor-dim}_W(W/\mathfrak{m}W) \leq 1$$

puisque  $W$  est plat sur  $V$ , d'où la conclusion.  $\square$

**Remarques 4.2.2.** (1) Si  $V$  est un anneau de valuation, toute  $V$ -algèbre de présentation finie (et en particulier toute  $V$ -algèbre plate de type fini, d'après [8, Theorem 3]) est un anneau cohérent [5, Theorem 7.3.3]. D'autre part, si  $(R_i)_{i \in I}$  est un système inductif filtrant d'anneaux cohérents, à morphismes de transition plats, l'anneau  $\varinjlim_i R_i$  est encore cohérent [5, Theorem 2.2.3].

Par suite, dans le théorème 4.1, la condition (ii) entraîne directement que  $W$  est cohérent. La proposition 4.2.1 redémontre donc que  $W$  est un anneau de valuation.

(2) En revanche, dans la situation de 4.2.1, soient  $\Gamma$  et  $\Delta$  les groupes de valuation respectifs de  $V$  et  $W$ . L'injection  $\Gamma \subset \Delta$  induit une injection  $\Gamma^{<1} \subset \Delta^{<1}$  entre éléments  $< 1$  des deux groupes. La condition (i) équivaut à dire que  $\Gamma^{<1}$  est *cofinal* dans  $\Delta^{<1}$ , et n'implique pas en général que  $\Gamma = \Delta$ ; si  $\Gamma \subsetneq \Delta$ , on déduit donc du théorème 4.1 que  $W$  n'est pas colimite filtrante de  $V$ -algèbres plates essentiellement de type fini, à morphismes de transition plats.

## 5 Compléments sur les extensions composées

Cette section est indépendante des précédentes.

**Définition 5.1.** *Soit  $X$  un schéma. Un point  $x$  de  $X$  est dit strictement maximal s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

- (i) *l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un corps ;*
- (ii)  *$\mathcal{O}_{X,x}$  est réduit et  $x$  est un point maximal de  $X$  ;*
- (iii) *le morphisme canonique  $\text{Spec}(\kappa(x)) \rightarrow X$  est plat.*

Soient  $L$  et  $M$  deux extensions d'un corps  $K$ . Rappelons [2, V, §2] qu'une *extension composée* de  $L$  et  $M$  est un triplet  $(K \subset E, u, v)$  où  $E$  est une extension de  $K$  et où  $u : L \rightarrow E$ ,  $v : M \rightarrow E$  sont deux  $K$ -plongements dont la réunion des images engendre  $E$ . On en déduit un morphisme de  $K$ -algèbres  $L \otimes_K M \xrightarrow{u \otimes v} E$ , et un point  $x$  de  $X := \text{Spec}(L \otimes_K M)$  à corps résiduel isomorphe à  $E$  ; le morphisme  $u \otimes v$  se factorise en  $L \otimes_K M \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow E$ . Cette construction fournit une bijection entre l'ensemble sous-jacent à  $X$  et l'ensemble des classes d'isomorphie d'extensions composées de  $L$  et  $M$ .

**Définition 5.2.** Soit  $(E, u, v)$  une extension composée de  $L$  et  $M$ , et soit  $x$  le point de  $X := \text{Spec}(L \otimes_K M)$  correspondant. Nous dirons que  $(E, u, v)$  est  $K$ -maximale (resp. strictement  $K$ -maximale) si  $x$  est un point maximal (resp. strictement maximal) de  $X$ .

**Remarques 5.2.1.** (1) Nous dirons « (strictement) maximale » au lieu de « (strictement)  $K$ -maximale » s'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $K$ . Toutefois, on prendra garde que si  $E$  est composée de  $L$  et  $M$  sur  $K$ , elle l'est également sur tout sous-corps de  $K$ , alors que la maximalité n'est pas conservée en général.

(2) La maximalité admet une interprétation plus classique, qui ne sera pas utilisée dans la suite : avec les notations de 5.2, pour que  $E$  soit  $K$ -maximale, il faut et il suffit que  $u(L)$  et  $v(M)$  soient algébriquement disjointes sur  $K$ , c'est-à-dire [2, V, §14] que toute partie de  $u(L)$  algébriquement libre sur  $K$  soit encore algébriquement libre sur  $v(M)$ .

**Proposition 5.3.** Avec  $K, L, M$  et  $X$  comme ci-dessus, soient  $x$  un point de  $X$  et  $(E = \kappa(x), u, v)$  l'extension composée correspondante.

(1) Si l'extension  $L/K$  est radicielle, alors  $x$  est le seul point de  $X$ , et  $E$  (égale à  $(L \otimes_K M)_{\text{red}}$ ) est, à isomorphisme unique près, la seule extension composée de  $L$  et  $M$  sur  $K$ .

(2) Soit  $L_0$  un sous-corps de  $L$  contenant  $K$ . Si  $E$  est  $K$ -maximale, il en est de même du sous-corps  $E_0 \subset E$  engendré par  $L_0$  et  $M$ , vu comme extension composée de  $L_0$  et  $M$ .

(3) Soit  $K_0$  un sous-corps de  $K$ . Si  $E$  est  $K_0$ -maximale, alors elle est  $K$ -maximale ; la réciproque est vraie si  $K$  est algébrique sur  $K_0$ .

(4) On suppose que  $E$  est maximale. Si l'extension  $L/K$  est séparable, alors  $E$  est strictement maximale, et est une extension séparable de  $M$ .

*Démonstration.* L'assertion (1) est bien connue : voir par exemple [2, V, §3, exercice 9]. Montrons (2). Soit  $x_0 \in \text{Spec}(L_0 \otimes_K M)$  le point correspondant à  $E_0$ . Alors  $x_0$  est l'image de  $x$  par le morphisme naturel  $\text{Spec}(L \otimes_K M) \rightarrow \text{Spec}(L_0 \otimes_K M)$ . Ce morphisme est plat, donc envoie un point maximal sur un point maximal, d'où l'assertion.

(3) Soit  $z \in X_0 := \text{Spec}(L \otimes_{K_0} M)$  le point correspondant à  $E$  vue comme extension composée sur  $K_0$ . On a un diagramme cartésien de schémas

$$\begin{array}{ccc} x \in X = \text{Spec}(L \otimes_K M) & \xleftarrow{j} & X_0 = \text{Spec}(L \otimes_{K_0} M) \ni z \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec}(K) & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec}(K \otimes_{K_0} K) \end{array}$$

où  $z = j(x)$ . Comme les flèches horizontales sont des immersions fermées, il est clair que si  $z$  est maximal dans  $X_0$ , alors  $x$  est maximal dans  $X$ , d'où la première assertion. Pour la réciproque, on observe que  $f$  est plat ; par suite, pour que  $z$  soit maximal dans  $X_0$ , il faut et il suffit qu'il soit maximal dans  $f^{-1}(f(z))$  (autrement dit, que  $x$  soit maximal dans  $X$ ) et que  $f(z)$  soit maximal dans  $\text{Spec}(K \otimes_{K_0} K)$ , ce qui est automatique si  $K$  est algébrique sur  $K_0$  puisqu'alors  $\text{Spec}(K \otimes_{K_0} K)$  est de dimension 0.

(4) Si  $L/K$  est séparable, alors  $L \otimes_K M$  est réduit, ainsi que son localisé  $\mathcal{O}_{X,x}$ , de sorte que  $E$  est strictement maximale. En outre,  $L \otimes_K M$  (et donc aussi  $\mathcal{O}_{X,x}$ ) est même une  $M$ -algèbre géométriquement réduite, d'où l'assertion de séparabilité.  $\square$



**Remarque 5.3.1.** Dans l'assertion (4), pour conclure que  $E/M$  est séparable, on ne peut se passer de l'hypothèse que  $E$  est maximale. Par exemple, soit  $K$  non parfait de caractéristique  $p$  et soit  $a \in K \setminus K^p$ . Considérons  $E = K(a^{1/p}, x)$  où  $x$  est une indéterminée. Alors  $E$  est composée de  $L = K(x)$  et  $M = K(x + a^{1/p})$ ;  $L$  est évidemment séparable sur  $K$ , mais  $E = M(a^{1/p})$  n'est pas séparable sur  $M$ .

## 6 Extension avec sous-corps imposé

### 6.1 Notations

On garde les notations du §3; on suppose en outre que  $V$  contient un corps  $k$ , et l'on fixe une extension  $k'$  de  $k$ . On pose  $V' = k' \otimes_k V$  et  $F' = k' \otimes_k F = V'/\mathfrak{m}V'$ . On note  $p$  l'exposant caractéristique de  $k$ .

On fixe de plus un idéal premier *minimal*  $\bar{\mathfrak{p}}$  de  $F'$ , et l'on note  $\mathfrak{p}$  l'idéal premier de  $V'$  correspondant, de sorte que  $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\mathfrak{m}V'$ . On désigne par  $x$  le point de  $\text{Spec}(V')$  (ou de  $\text{Spec}(F')$ ) correspondant à  $\mathfrak{p}$ , et par

$$W := V'_{\mathfrak{p}}$$

son anneau local dans  $\text{Spec}(V')$ ; on a un diagramme cartésien de schémas affines

$$\begin{array}{ccccc} x \in \text{Spec}(F'_{\bar{\mathfrak{p}}}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(W) & & \\ \downarrow \bar{j} & & \downarrow j & & \\ \text{Spec}(F') & \hookrightarrow & \text{Spec}(V') & \longrightarrow & \text{Spec}(k') \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \pi & & \downarrow \\ \text{Spec}(F) & \hookrightarrow & \text{Spec}(V) & \longrightarrow & \text{Spec}(k) \end{array}$$

où les flèches  $j$  et  $\bar{j}$  sont les localisations au point  $x$ , qui est un point maximal de  $\text{Spec}(F')$ ; les flèches du type  $\hookrightarrow$  sont des immersions fermées. Pour tout point  $y$  de  $\text{Spec}(V')$ , l'extension  $\kappa(y)/k$  est composée de  $k'$  et de  $\kappa(\pi(y))$ , puisque la fibre  $\pi^{-1}(\pi(y))$  s'identifie à  $\text{Spec}(k' \otimes_k \kappa(\pi(y)))$  (voir les rappels du §5).

Il est clair que  $W$  est une  $V$ -algèbre locale fidèlement plate; son corps résiduel  $\kappa(x) = (F'_{\bar{\mathfrak{p}}})_{\text{red}}$  est, vu le choix de  $x$ , une extension composée *maximale* de  $k'$  et  $F$ .

**Théorème 6.2.** (le cas strictement maximal) *Les hypothèses et notations étant celles de 6.1, on suppose de plus que  $x$  est un point strictement maximal (5.1) de  $\text{Spec}(F')$ . Alors :*

- (1)  $W$  est une extension faiblement non ramifiée de  $V$ .
- (2) Le morphisme naturel  $\pi \circ j : \text{Spec}(W) \rightarrow \text{Spec}(V)$  est un homéomorphisme; de plus, pour tout idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $V$ , l'unique idéal premier de  $W$  au-dessus de  $\mathfrak{q}$  est  $\mathfrak{q}' := \mathfrak{q}W$ , et son corps résiduel  $\kappa(\mathfrak{q}')$  est une extension composée strictement maximale de  $k'$  et  $\kappa(\mathfrak{q})$  sur  $k$ .
- (3) Si l'extension  $k'/k$  est séparable, il en est de même de  $\kappa(x)/F$ , et plus généralement (avec les notations de (2)) de  $\kappa(\mathfrak{q}')/\kappa(\mathfrak{q})$ , pour tout  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(V)$ .
- (4) Si l'extension  $F/k$  est séparable, il en est de même de  $\kappa(x)/k'$ , et plus généralement de  $\kappa(\mathfrak{q}')/k'$ , pour tout  $\mathfrak{q}' \in \text{Spec}(W)$ .

*Démonstration.* (1) Montrons que les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites. Par hypothèse, l'anneau local  $F_{\mathfrak{p}}'$  coïncide avec  $\kappa(\mathfrak{p})$ ; cela équivaut à dire que l'idéal maximal de  $W$  est engendré par  $\mathfrak{m}$ , ce qui est l'hypothèse (i) de 4.1. Vérifions l'hypothèse (ii) : soit  $(k_i)_{i \in I}$  la famille ordonnée des sous-extensions de  $k'$  qui sont de type fini sur  $k$ . Alors  $W$  est limite inductive de la famille  $((k_i \otimes_k V)_{\mathfrak{p}_i})_{i \in I}$  où  $\mathfrak{p}_i$  est l'idéal premier de  $k_i \otimes_k V$  au-dessous de  $\mathfrak{p}$ ; les morphismes de transition sont plats puisque les  $k_i$  sont des corps, et chaque  $(k_i \otimes_k V)_{\mathfrak{p}_i}$  est essentiellement de type fini sur  $V$  puisque les  $k_i$  sont des  $k$ -algèbres essentiellement de type fini. On peut donc appliquer le théorème 4.1, ce qui donne (1).

(2) est conséquence de (1) et de la proposition 2.2.1 (2), à l'exception des assertions sur les extensions composées. Pour  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{q}'$  comme dans l'énoncé, on a  $\kappa(\mathfrak{q}') = \kappa(\mathfrak{q}) \otimes_V W$  (toujours d'après 2.2.1 (2)) et en particulier  $\kappa(\mathfrak{q}')$  est plat sur  $\kappa(\mathfrak{q}) \otimes_V V' \cong \kappa(\mathfrak{q}) \otimes_k k'$ , donc  $\mathfrak{q}'$  est un point strictement maximal de  $\text{Spec}(\kappa(\mathfrak{q}) \otimes_k k')$  (condition (iii) de 5.1), d'où la conclusion.

(3) est conséquence de (2), compte tenu de 5.3 (4). Dans (4), la séparabilité de  $\kappa(x)/k'$  résulte aussi de 5.3 (4), et celle des autres corps résiduels s'en déduit par 3.2.3.  $\square$

**Théorème 6.3.** (le cas général) *Soient  $V$ ,  $k$  et  $k'$  comme dans 6.1. Il existe un anneau de valuation  $W$  dominant  $V$  et contenant  $k'$ , avec les propriétés suivantes :*

- (i) *si  $\Delta$  désigne le groupe de  $W$ , le quotient  $\Delta/\Gamma$  est de  $p$ -torsion ;*
- (ii) *le morphisme naturel  $\text{Spec}(W) \rightarrow \text{Spec}(V)$  est un homéomorphisme ;*
- (iii) *pour tout  $\mathfrak{q}' \in \text{Spec}(W)$ , d'image  $\mathfrak{q}$  dans  $\text{Spec}(V)$ ,  $\kappa(\mathfrak{q}')$  est radiciel sur son sous-corps engendré par  $k'$  et  $\kappa(\mathfrak{q})$  ; ce dernier est une extension composée maximale de  $k'$  et  $\kappa(\mathfrak{q})$  sur  $k$ .*

*Démonstration.* Pour fixer les idées, on supposera que  $p > 1$  (en caractéristique nulle, le théorème 6.2 s'applique). Pour tout anneau  $R$  de caractéristique  $p$ , on notera  $R^\dagger = R^{p^{-\infty}}$  sa clôture parfaite. L'anneau  $V^\dagger$  est un anneau de valuation, de groupe  $\Gamma^\dagger := \mathbb{Z}[1/p] \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma$  ; explicitement,

$$V^\dagger = \{z \in K^\dagger : z^{p^n} \in V \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ assez grand}\}.$$

Soit  $k''$  l'unique extension composée de  $k'$  et  $k^\dagger$  (cf. 5.3 (1)). Comme  $k^\dagger \subset V^\dagger$  et que  $k^\dagger$  est parfait, on peut appliquer le théorème 6.2 à  $k^\dagger \subset V^\dagger$  et à l'extension  $k''/k^\dagger$  : on obtient un anneau de valuation  $W$  contenant  $k''$ , extension faiblement non ramifiée de  $V^\dagger$  et donc de groupe  $\Gamma^\dagger$ . Ceci prouve les assertions (i) et (ii).

Soient  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{q}'$  comme dans (iii), et soit  $\mathfrak{q}^\dagger = \mathfrak{q}' \cap V^\dagger$ . Alors  $\mathfrak{q}^\dagger$  est le point de  $\text{Spec}(V^\dagger)$  au-dessus de  $\mathfrak{q}$ , de sorte que  $\kappa(\mathfrak{q}^\dagger)$  s'identifie à  $\kappa(\mathfrak{q})^\dagger$ . D'après 6.2, le corps résiduel  $\kappa(\mathfrak{q}')$  est extension composée maximale, sur  $k^\dagger$ , de  $k'' = k'k^\dagger$  et  $\kappa(\mathfrak{q})^\dagger$  ; il est donc radiciel sur l'extension composée  $k'\kappa(\mathfrak{q})$ . Il reste à voir que celle-ci est  $k$ -maximale : or on vient de voir que  $(\kappa(\mathfrak{q}'), k'', \kappa(\mathfrak{q})^\dagger)$  est  $k^\dagger$ -maximale, et donc  $k$ -maximale d'après 5.3 (3) puisque  $k^\dagger$  est algébrique sur  $k$ . Comme  $k' \subset k''$  et  $\kappa(\mathfrak{q}) \subset \kappa(\mathfrak{q})^\dagger$ , on déduit de 5.3 (2) que  $k'\kappa(\mathfrak{q})$  est bien composée  $k$ -maximale de  $k'$  et  $\kappa(\mathfrak{q})$ .  $\square$

## Références

- [1] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative, chapitres 5 à 7.* Springer, Paris, 1985.

- [2] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre, chapitres 4 à 7*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [3] B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad. *Pseudo-reductive groups*, New Mathematical Monographs, volume 26. Cambridge University Press, Cambridge, seconde édition, 2015.
- [4] O. Gabber et L. Ramero. *Almost ring theory*, Lecture Notes in Mathematics, volume 1800. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [5] S. Glaz. *Commutative coherent rings*, Lecture Notes in Mathematics, volume 1371. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [6] I. Kaplansky. *Projective modules*. Ann. of Math (2), 68 :372–377, 1958.
- [7] L. Moret-Bailly. *Compactifying pseudocomplete varieties*. 2020, en préparation.
- [8] M. Nagata. *Finitely generated rings over a valuation ring*. J. Math. Kyoto Univ., 5 :163–169, 1966.
- [9] M. Raynaud et L. Gruson. *Critères de platitude et de projectivité. Techniques de “platification” d’un module*. Invent. Math., 13 :1–89, 1971.
- [10] The Stacks Project authors. *The Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2020.