Licence L2 - Parcours Mécanique
CC Statique
2023-2024 _ Durée : 0h45
Responsable : L. Blanchard
Eléments de correction

1)
Isolons la potence. La potence est soumise à :
— l'action de la force $\vec{F}_1$ caractérisée par le torseur $\{\mathcal{T}_1\}$;
— l'action de la force $\vec{F}_2$ caractérisée par le torseur $\{\mathcal{T}_2\}$;
— l'action du sol (au niveau de la liaison encastrement) caractérisée par le torseur $\{\mathcal{T}_3\}$.
On caractérise :

$$\{\mathcal{T}_1\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1 \\ \vec{M}(A, \mathcal{T}_1) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

On calcule $\vec{M}(O, \mathcal{T}_1)$:

$$\begin{array}{rcl} \vec{M}(O, \mathcal{T}_1) & = & \vec{M}(A, \mathcal{T}_1) + \vec{OA} \wedge \vec{F}_1 \\ & = & \vec{OA} \wedge \vec{F}_1 \\ & = & h \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & = & Fh \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On caractérise :

$$\{\mathcal{T}_2\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_2 \\ \vec{M}(B, \mathcal{T}_2) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

On calcule $\vec{M}(O, \mathcal{T}_2)$:

$$\begin{array}{rcl} \vec{M}(O, \mathcal{T}_2) & = & \vec{M}(B, \mathcal{T}_2) + \vec{OB} \wedge \vec{F}_2 \\ & = & \vec{OB} \wedge \vec{F}_2 \\ & = & h \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge F \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ -2 \end{pmatrix} \\ & = & Fh \begin{pmatrix} -4-2b \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le **P.F.S.** appliqué à la potence donne :

$$\{\mathcal{T}_1\} + \{\mathcal{T}_2\} + \{\mathcal{T}_3\} = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \{\mathcal{T}_3\} = -\{\mathcal{T}_1\} - \{\mathcal{T}_2\}$$

donc :

$$\{\mathcal{T}_3\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = -F \begin{pmatrix} 2+3 \\ 1+b \\ -1-2 \end{pmatrix} = -F \begin{pmatrix} 5 \\ 1+b \\ -3 \end{pmatrix} \\ \vec{M}(O, \mathcal{T}_3) = -Fh \begin{pmatrix} -4-4-2b \\ 10+6 \\ 2-6 \end{pmatrix} = -Fh \begin{pmatrix} -8-2b \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

2)
Le torseur $\{\mathcal{T}_3\}$ n'est pas un torseur couple car $\vec{R} \neq \vec{0}$.

3)
Si $\{\mathcal{T}_3\}$ admet un centre de poussée, alors $\vec{M}(O,\mathcal{T}_3) \perp \vec{R}$ donc $\vec{M}(O,\mathcal{T}_3) \cdot \vec{R} = 0$.

$$\begin{aligned}\vec{M}(O,\mathcal{T}_3) \cdot \vec{R} &= F^2 h\,[5(-8-2b) + 16(1+b) + 12] \\ &= F^2 h\,[-40 - 10b + 16 + 16b + 12] \\ &= F^2 h\,[-12 + 6b] = 0\end{aligned}$$

donc seulement si $b = 2$ et alors :

$$\{\mathcal{T}_3\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = -F \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \vec{M}(O,\mathcal{T}_3) = -Fh \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Le centre de poussée I du torseur $\mathcal{T}_3$ sera déterminé par :

$$\begin{aligned}\vec{M}(O,\mathcal{T}_3) &= \vec{M}(I,\mathcal{T}_3) + \vec{OI} \wedge \vec{R} \\ -Fh \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix} &= \vec{0} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge (-F) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad h \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3Y - 3Z \\ 5Z + 3X \\ 3X - 5Y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

— Si $X = 0$ (par ex.) :

$$16h = 5Z \quad \Longrightarrow \quad Z = \frac{16}{5}h$$
$$-4h = -5Y \quad \Longrightarrow \quad Y = \frac{4}{5}h$$

On vérifie la première équation :

$$-12h = -3\frac{4}{5}h - 3\frac{16}{5}h \quad \Longrightarrow \quad -12 = -\frac{12}{5} - \frac{48}{5} = -\frac{6}{0}5 = -12$$

Un des centres de poussée est le point I :

$$\vec{OI} = \frac{h}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

— Si $Y = 0$ (par ex.) :

$$-12h = -3Z \quad \Longrightarrow \quad Z = 4h$$
$$-4h = 3X \quad \Longrightarrow \quad X = -\frac{4}{3}h$$

On vérifie la deuxième équation :

$$16h = 5 * 4h - 3\frac{4}{3}h \quad \Longrightarrow \quad 16 = 20 - 4 = 16$$

Un des centres de poussée est le point J :

$$\vec{OJ} = h \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

— Si $Z = 0$ (par ex.) :

$$\begin{aligned} -12h = -3Y &\implies Y = 4h \\ 16h = 3X &\implies X = \frac{16}{3}h \end{aligned}$$

On vérifie la troisième équation :

$$-4h = 3 * \frac{16}{3}h - 5 * 4h \implies -4 = 16 - 20 = -4$$

Un des centres de poussée est le point K :

$$\vec{OK} = h \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces 3 points doivent être alignés sur une droite qui est orientée comme $\vec{R}$.

$$\begin{aligned} \vec{IJ} &= \vec{OJ} - \vec{OI} \\ &= h \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{h}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \\ &= \frac{h}{5} \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} - 0 \\ 5 * 0 - 4 \\ 20 - 16 \end{pmatrix} \\ &= \frac{h}{5} \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{h}{15} \begin{pmatrix} -20 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-4h}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On vérifie que $\vec{R} \parallel \vec{IJ}$

Et :

$$\begin{aligned} \vec{IK} &= \vec{OK} - \vec{OI} \\ &= h \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{h}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \\ &= \frac{h}{5} \begin{pmatrix} \frac{5*16}{3} \\ 20 - 4 \\ -16 \end{pmatrix} \\ &= \frac{h}{5} \begin{pmatrix} \frac{5*16}{3} \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix} \\ &= \frac{16h}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On vérifie que $\vec{R} \parallel \vec{IK}$