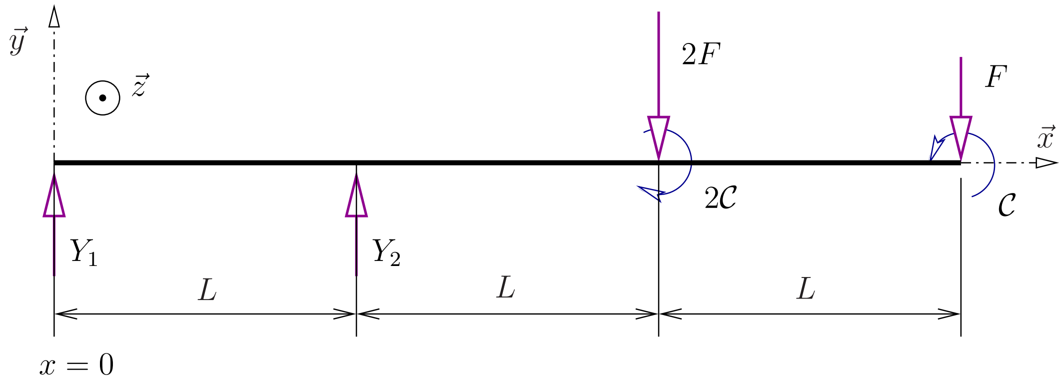
Isolons toute la poutre et appliquons le **P.F.S.** .




On obtient (moments en $x = 0$ puis en $x = 2L$) :

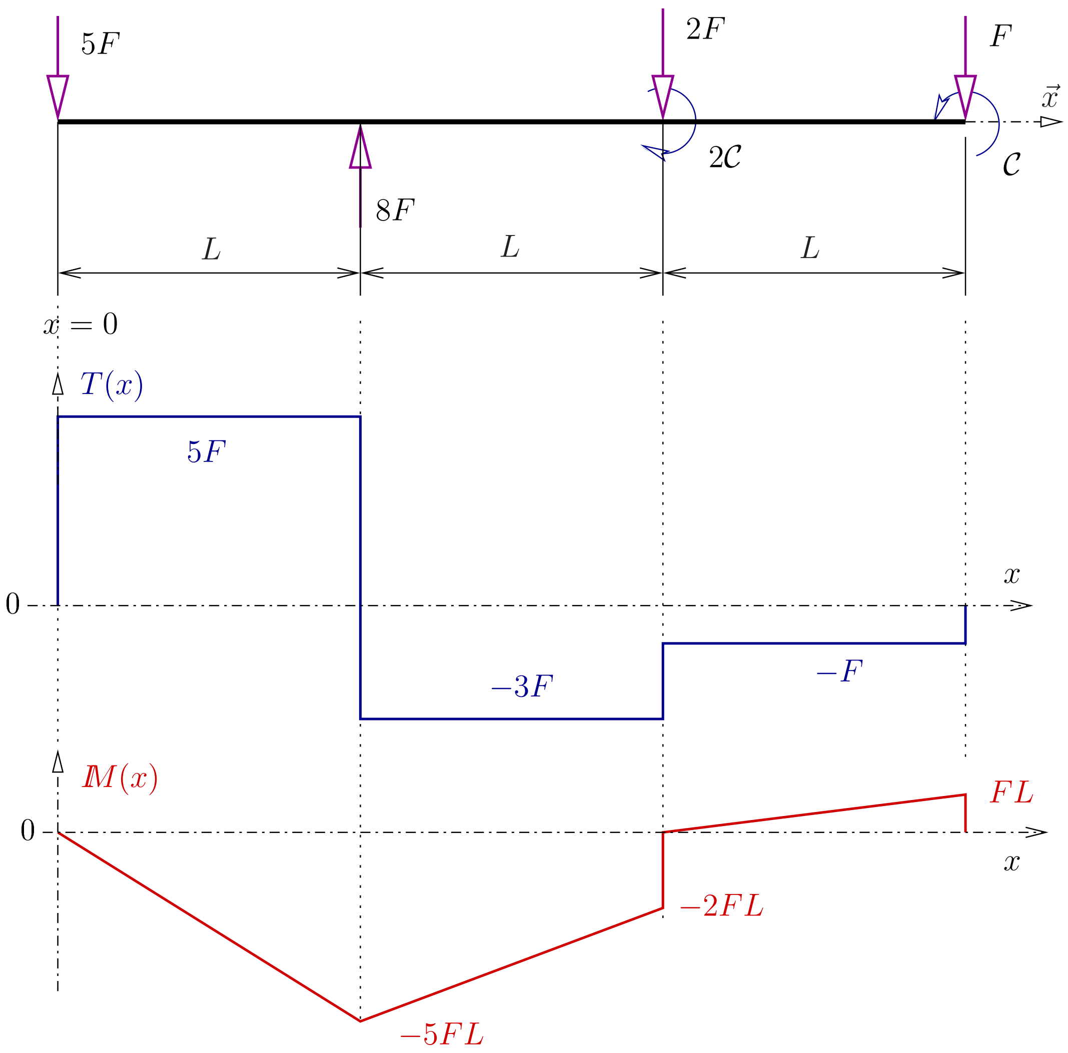
$$\begin{cases} LY_2 - 2L2F - 3LF + C - 2C = 0 \\ -LY_1 - L2F - 2LF + C - 2C = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Y_2 = 8F = 9600 \text{ N} \\ Y_1 = -5F = -6000 \text{ N} \end{cases}$$

................................................................................................ **[2]**

On vérifie :

$$Y_1 + Y_2 - 2F - F = 0 \Longrightarrow -5F + 8F - 2F - F = 0$$

En réalisant trois coupures et en isolant une portion de poutre, il vient les diagrammes suivant (je ne présente pas ici les dessins qu'il fallait réaliser pour aboutir à ces résultats) :




avec

| $x \in [0; L]$ | $x \in [L; 2L]$ | $x \in [2L; 3L]$ |
|---|---|---|
| $T(x) = 5F$ | $T(x) = -3F$ | $T(x) = -F$ |
| $M(x) = -5Fx$ | $M(x) = F(3x - 8L)$ | $M(x) = F(x - 2L)$ |

.......................................................................................... **[6]**

C'est en $x = L$ que le moment fléchissant est maxi et vaut $-5FL$. La contrainte maxi vaut alors :

$$\sigma_M = \frac{5FL}{I}\frac{h}{2} = \frac{5FL}{bh^3}12\frac{h}{2} = \frac{30FL}{bh^2} = 36 \text{ MPa}$$

.......................................................................................... **[1]**

Les points situés à $x = L$ et $y = +\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en traction ; Ceux situés à $y = -\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en compression.

On ne sort pas du domaine élastique : le coefficient de sécurité est $\frac{50}{36} = 1.388$. ................. **[1]**

La détermination de la flèche se fait à partir des relations et des conditions suivantes :

$$
\begin{array}{c|c|c}
x \in [0; L] & x \in [L; 2L] & x \in [2L; 3L] \\
\mathbb{M}(x) = EIv''(x) = -5Fx & \mathbb{M}(x) = EIv''(x) = F(3x - 8L) & \mathbb{M}(x) = EIv''(x) = F(x - 2L) \\
EIv'(x) = F\left(-5\frac{x^2}{2} + A\right) & EIv'(x) = F\left(3\frac{x^2}{2} - 8Lx + D\right) & EIv'(x) = F\left(\frac{x^2}{2} - 2Lx + H\right) \\
EIv(x) = F\left(-5\frac{x^3}{6} + Ax + B\right) & EIv(x) = F\left(3\frac{x^3}{6} - 8L\frac{x^2}{2} + Dx + G\right) & EIv(x) = F\left(\frac{x^3}{6} - 2L\frac{x^2}{2} + Hx + J\right)
\end{array}
$$

avec les conditions limites

$$
\begin{array}{c|c|c}
v(0) = 0 & & \\
v(L) = 0 & v(L) = 0 & \\
\multicolumn{2}{c|}{v'(x) \text{ continu en } x = L} & \\
& \multicolumn{2}{c}{v(x) \text{ continu en } x = 2L} \\
& \multicolumn{2}{c}{v'(x) \text{ continu en } x = 2L}
\end{array}
$$

.................................................................................................................. **[2]**

Ces 6 conditions donnent ces 6 équations :

$$
\begin{cases}
B = 0 \\
-5\frac{L^3}{6} + AL + B = 0 \\
3\frac{L^3}{6} - 8L\frac{L^2}{2} + DL + G = 0 \\
-5\frac{L^2}{2} + A = 3\frac{L^2}{2} - 8L^2 + D \\
3\frac{(2L)^2}{2} - 8L(2L) + D = \frac{(2L)^2}{2} - 2L(2L) + H \\
3\frac{(2L)^3}{6} - 8L\frac{(2L)^2}{2} + D(2L) + G = \frac{(2L)^3}{6} - 2L\frac{(2L)^2}{2} + H2L + J
\end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow \quad
\begin{cases}
B = 0 \\
A = \frac{5}{6}L^2 \\
\frac{L^3}{2} - 4L^3 + DL + G = 0 \\
-\frac{5}{2}L^2 + \frac{5}{6}L^2 = \frac{3}{2}L^2 - 8L^2 + D \\
6L^2 - 16L^2 + D = 2L^2 - 4L^2 + H \\
4L^3 - 16L^3 + 2DL + G = \frac{4}{3}L^3 - 4L^3 + 2HL + J
\end{cases}
$$

De la quatrième équation, on déduit :

$$D = \left(-\frac{5}{2} + \frac{5}{6} - \frac{3}{2} + 8\right) L^2 = \left(\frac{5}{6} + 4\right) L^2 = \frac{29}{6} L^2$$

que l'on relance dans la troisième équation :

$$G = \left(-\frac{1}{2} + 4 - \frac{29}{6}\right) L^3 = -\frac{8}{6} L^3 = -\frac{4}{3} L^3$$

et dans la cinquième équation :

$$H = \left(6 - 16 + \frac{29}{6} - 2 + 4\right) L^2 = -\frac{19}{6} L^2$$

et enfin la sixième équation donne :

$$J \;\; = \;\; 4L^3 - 16L^3 + 2DL + G - \frac{4}{3}L^3 + 4L^3 - 2HL$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(4 - 16 + \frac{29}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 4 + \frac{19}{3}\right) L^3 \\
&= \left(-8 + \frac{40}{3}\right) L^3 \\
\Longrightarrow \quad J &= \frac{16}{3} L^3
\end{aligned}
$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[3]**

On a finalement :

| $x \in [0; L]$ | $x \in [L; 2L]$ | $x \in [2L; 3L]$ |
|---|---|---|
| $EIv(x) = F\left(-5\frac{x^3}{6} + \frac{5}{6}L^2 x\right)$ | $EIv(x) = F\left(3\frac{x^3}{6} - 8L\frac{x^2}{2} + \frac{29}{6}L^2 x - \frac{4}{3}L^3\right)$ | $EIv(x) = F\left(\frac{x^3}{6} - 2L\frac{x^2}{2} - \frac{19}{6}L^2 x + \frac{16}{3}L^3\right)$ |
| $EIv(x) = \frac{F}{6}\left(-5x^3 + 5L^2 x\right)$ | $EIv(x) = \frac{F}{6}\left(3x^3 - 24Lx^2 + 29L^2 x - 8L^3\right)$ | $EIv(x) = \frac{F}{6}\left(x^3 - 6Lx^2 - 19L^2 x + 32L^3\right)$ |

En posant la variable adimensionnelle $X = \frac{x}{L}$, la flèche adimensionnée $v^*(X) = \frac{6EIv(x)}{FL^3}$ est :

| $X \in [0; 1]$ | $X \in [1; 2]$ | $X \in [2; 3]$ |
|---|---|---|
| $v^*(X) = (-5X^3 + 5X)$ | $v^*(X) = (3X^3 - 24X^2 + 29X - 8)$ | $v^*(X) = (X^3 - 6X^2 - 19X + 32)$ |

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[2]**

La flèche est maxi en $x = 3L$ donc pour $X = 3$. On a $v^*(3) = -52$. La flèche maxi est :

$$|v(3L)| = \frac{52FL^3}{6EI} = 33.78 \text{ mm}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[1.5]**

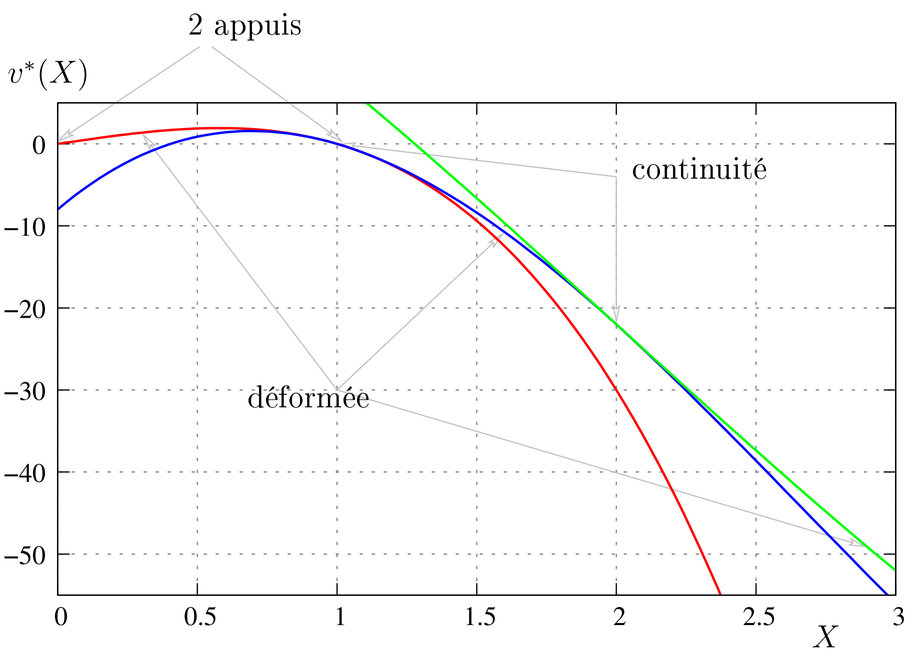



FIGURE 1 – Les 3 fonctions, représentant la déformée, présentent une continuité et une pente continue en $X = 1$ et $X = 2$. Cette figure représente la déformée de la poutre amplifiée.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[1.5]**