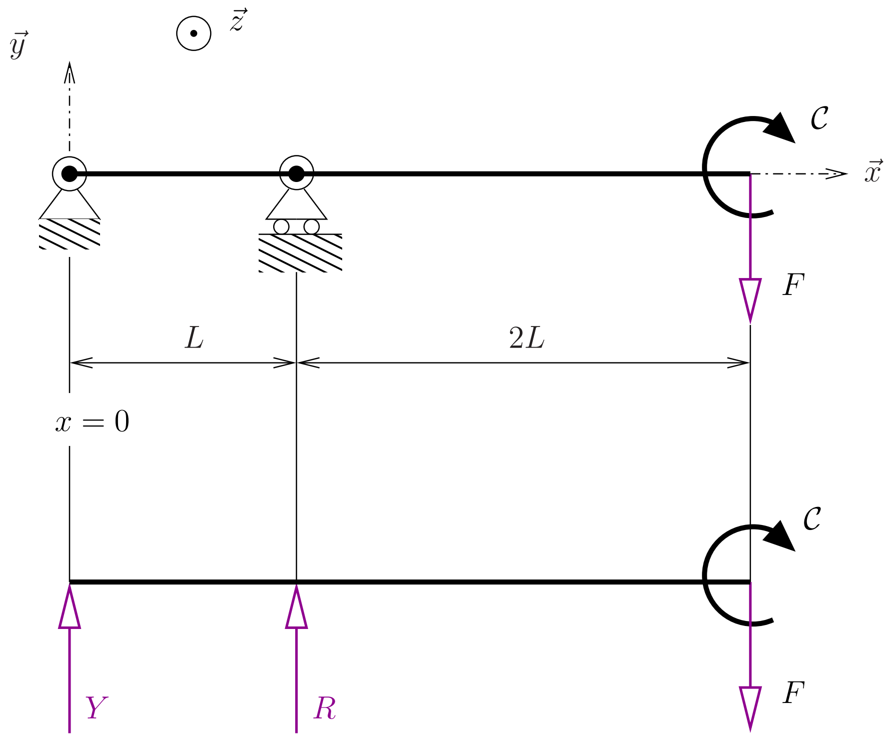
Exercice n°1 - RDM - 13.5 pts

Isolons toute la poutre et appliquons le **P.F.S.** .

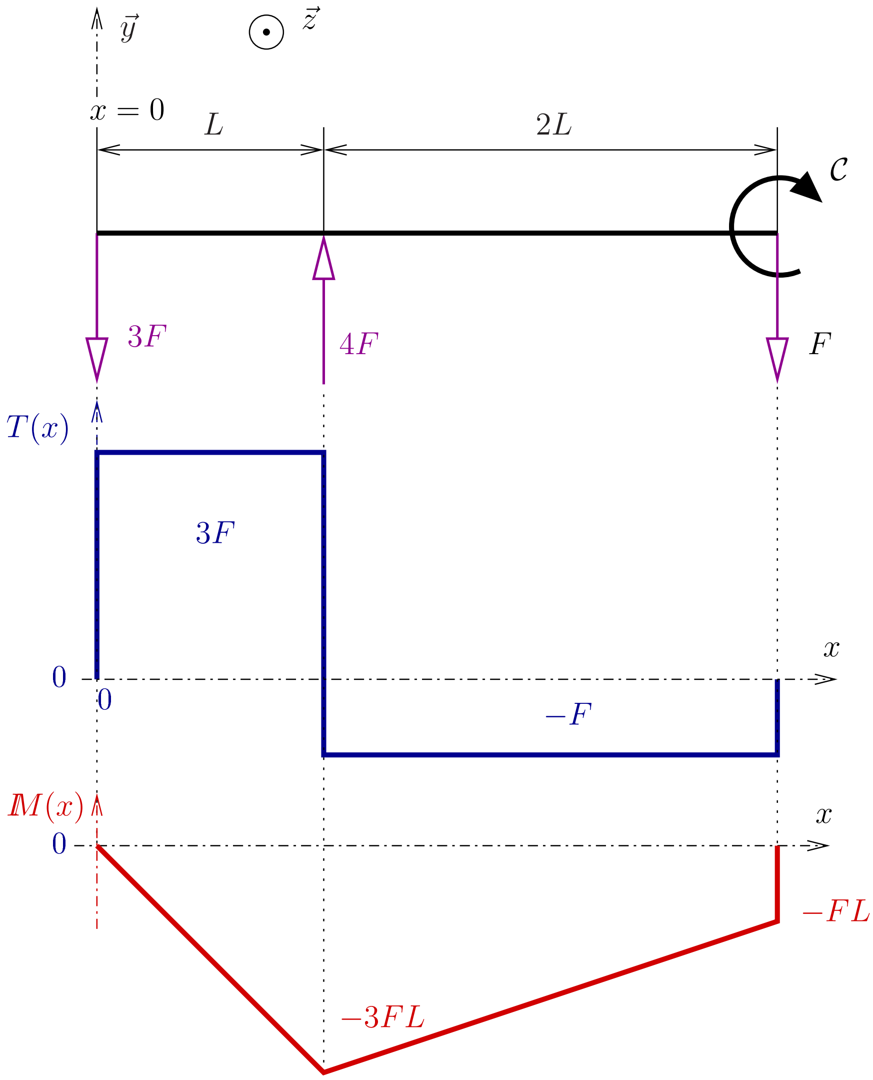


On obtient en écrivant les équations des moments aux appuis (avec $\mathcal{C} = FL$) :

$$\begin{cases} -3FL - \mathcal{C} + RL = 0 \\ -2FL - \mathcal{C} - YL = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} R &= 4F = 4000 \text{ N} \\ Y &= -3F = -3000 \text{ N} \end{cases}$$

On vérifie la somme des forces : $Y + R - F = 0$. .... **[1.5]**

En réalisant deux coupures et en isolant une portion de poutre, il vient les diagrammes. .... **[2]**



Les calculs non écrits dans ce corrigé étaient à rédiger sur votre copie .... **[2]**

C'est en $x = L$ que le moment fléchissant est maxi et vaut $-3FL$. La contrainte maxi vaut alors :

$$\sigma_M = \frac{3FL}{I}\frac{h}{2} = \frac{3FL}{bh^3}12\frac{h}{2} = \frac{18FL}{bh^2} = 288 \text{ MPa}$$

.... **[0.5]**

Les points de cette section situés à $y = -\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en compression ; Ceux situés à $y = +\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en traction. .... **[0.5]**

On ne sort pas du domaine élastique : le coefficient de sécurité est $R_e/\sigma_M \approx 1.98$ .... **[0.5]**

La détermination de la flèche se fait à partir des relations et des conditions suivantes :

$$\begin{array}{c|c}
x \in [0; L] & x \in [L; 3L] \\
M(x) = -3Fx & M(x) = F(x-4L) \\
EIv''(x) = -3Fx & EIv''(x) = F(x-4L) \\
EIv'(x) = F\left(-3\frac{x^2}{2} + A\right) & EIv'(x) = F\left(\frac{x^2}{2} - 4Lx + B\right) \\
EIv(x) = F\left(-3\frac{x^3}{6} + Ax + D\right) & EIv(x) = F\left(\frac{x^3}{6} - 4L\frac{x^2}{2} + Bx + G\right) \\
v(0) = 0 & \\
v(L) = 0 & v(L) = 0
\end{array}$$

$$v'(x) \text{ continu en } x = L$$

.... **[1]**

Les 4 conditions donnent :

$$\begin{cases}
D = 0 \\
-3\frac{L^3}{6} + AL + D = 0 \\
\frac{L^3}{6} - 4L\frac{L^2}{2} + BL + G = 0 \\
-3\frac{L^2}{2} + A = \frac{L^2}{2} - 4L^2 + B
\end{cases}$$

La 2ème équation donne :

$$A = 3\frac{L^2}{6} = \frac{L^2}{2}$$

La 4ème équation donne alors :

$$-3\frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{2} = \frac{L^2}{2} - 4L^2 + B \quad \Longrightarrow \quad B = -L^2 + 4L^2 - \frac{L^2}{2} = \frac{5L^2}{2}$$

et la 3ème équation :

$$G = -\frac{L^3}{6} + \frac{4L^3}{2} - \frac{5L^3}{2} = -\frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{2} = -\frac{L^3}{6} - \frac{3L^3}{6} = -\frac{4L^3}{6} = -\frac{2L^3}{3}$$

On a finalement :

$$\begin{array}{c|c}
x \in [0; L] & x \in [L; 2L] \\
EIv(x) = F\left(-3\frac{x^3}{6} + \frac{L^2}{2}x\right) & EIv(x) = F\left(\frac{x^3}{6} - 4L\frac{x^2}{2} + \frac{5L^2}{2}x - \frac{2L^3}{3}\right) \\
EIv(x) = \frac{F}{6}\left(-3x^3 + 3L^2x\right) & EIv(x) = \frac{F}{6}\left(x^3 - 12Lx^2 + 15L^2x - 4L^3\right)
\end{array}$$

En posant la variable adimensionnelle $X = \frac{x}{L}$, la flèche adimensionnée $v^*(X) = \frac{6EIv(x)}{FL^3}$ est :

$$\begin{array}{c|c}
X \in [0; 1] & X \in [1; 2] \\
v^*(X) = -3X^3 + 3X & v^*(X) = X^3 - 12X^2 + 15X - 4
\end{array}$$

.... **[2.5]**

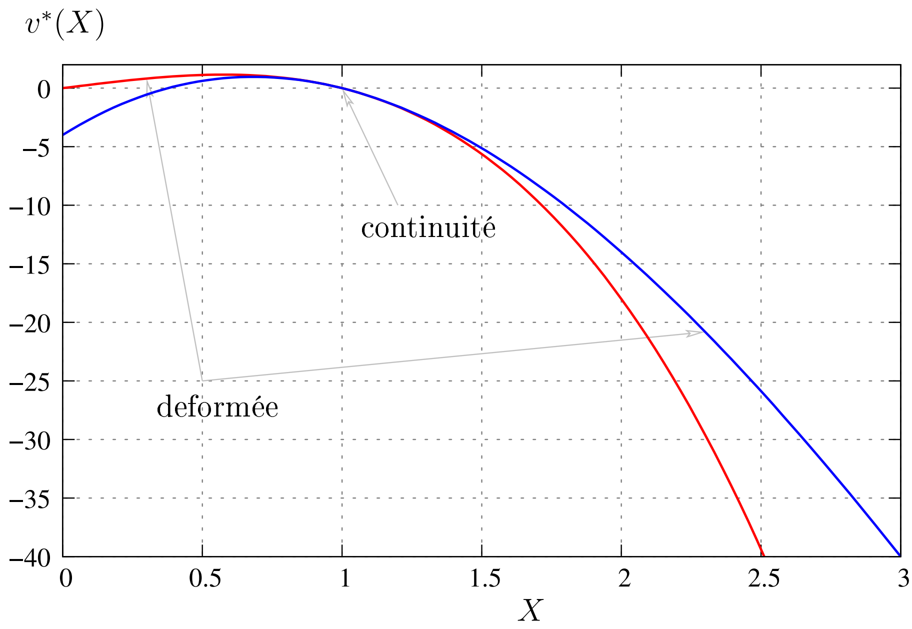


FIGURE 1 – Les 2 fonctions, représentant la déformée, présentent une continuité et une pente continue en $X = 1$. Cette figure représente la déformée de la poutre amplifiée. . . . . **[1.5]**

La flèche est maxi en $x = 3L$ ($X = 3$). On a $v^*(3) = -40$. La flèche maxi est :

$$\frac{40FL^3}{6EI} \approx 39.0 \text{ mm}$$

. . . . **[1.5]**

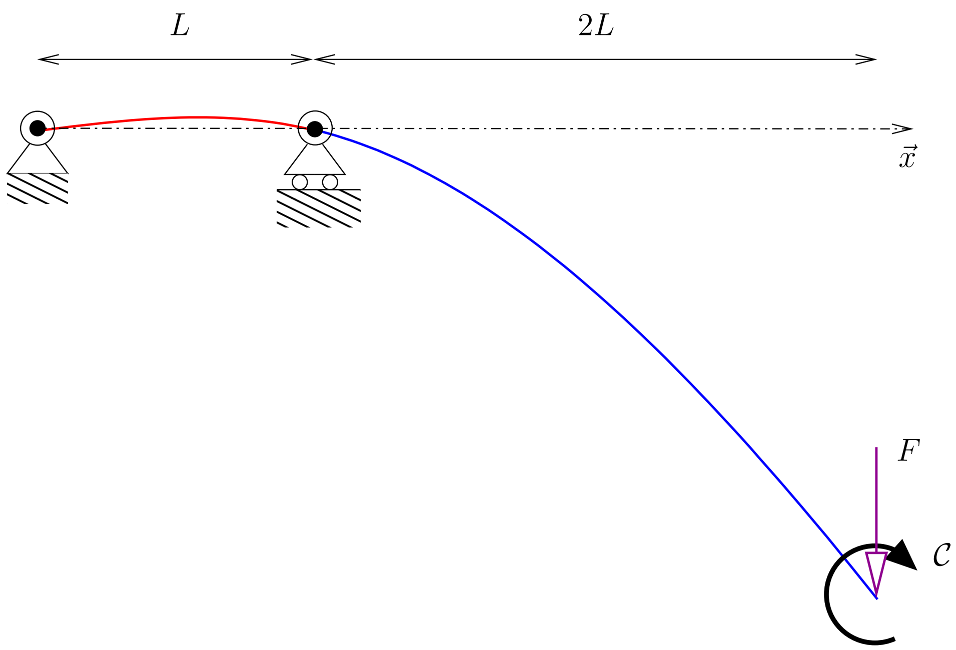


FIGURE 2 – Déformée de la poutre amplifiée.

Exercice n°2 - Liaisons - 6.5 pts

1)

$$\{\mathcal{V}'1/0\} : \left\{\begin{array}{cc} a' & u' \\ b' & v' \\ c' & 0 \end{array}\right\}_A \quad ; \quad \{\mathcal{V}''1/0\} : \left\{\begin{array}{cc} a'' & u'' \\ b'' & v'' \\ c'' & 0 \end{array}\right\}_B \quad ; \quad \{\mathcal{V}'''1/0\} : \left\{\begin{array}{cc} 0 & u''' \\ b''' & v''' \\ c''' & 0 \end{array}\right\}_C$$

.... **[0.5]**

2)

$$\vec{V}(C \in 1/0') = \vec{V}(A \in 1/0') + \vec{\Omega}(1/0)' \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' + c'h \\ v' - c'd \\ -a'h + b'd \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{V}(C \in 1/0'') = \vec{V}(B \in 1/0'') + \vec{\Omega}(1/0)'' \wedge \vec{BC} = \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} e \\ l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'' + c''l \\ v'' - c''e \\ -a''l + b''e \end{pmatrix}$$

donc

$$\{\mathcal{V}'1/0\} : \left\{\begin{array}{cc} a' & u' + c'h \\ b' & v' - c'd \\ c' & -a'h + b'd \end{array}\right\}_C \quad ; \quad \{\mathcal{V}''1/0\} : \left\{\begin{array}{cc} a'' & u'' + c''l \\ b'' & v'' - c''e \\ c'' & -a''l + b''e \end{array}\right\}_C \quad ; \quad \{\mathcal{V}'''1/0\} : \left\{\begin{array}{cc} 0 & u''' \\ b''' & v''' \\ c''' & 0 \end{array}\right\}_C$$

.... **[0.75]**

3)

$$\left\{\begin{array}{c} a' = a'' = 0 \\ b' = b'' = b'''(= b) \\ c' = c'' = c'''(= c) \\ u' + c'h = u'' + c''l = u''' \\ v' - c'd = v'' - c''e = v''' \\ -a'h + b'd = -a''l + b''e = 0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} a' = a'' = 0 \\ b' = b'' = b'''(= b) \\ c' = c'' = c'''(= c) \\ u' + ch = u'' + cl = u'''(= u) \\ v' - cd = v'' - ce = v'''(= v) \\ bd = be = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 0 \end{array}\right.$$

Le torseur cinématique de (1) par rapport à (0) prend la forme :

$$\{\mathcal{V}1/0\} : \left\{\begin{array}{cc} 0 & u \\ 0 & v \\ c & 0 \end{array}\right\}_C$$

.... **[1]**

$$\{0 \to 1\} : \left\{\begin{array}{cc} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{array}\right\}_C$$

4)

$$\{0 \to 1'\} : \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z' & 0 \end{array}\right\}_A \quad ; \quad \{0 \to 1''\} : \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z'' & 0 \end{array}\right\}_B \quad ; \quad \{0 \to 1'''\} : \left\{\begin{array}{cc} 0 & L''' \\ 0 & 0 \\ Z''' & 0 \end{array}\right\}_C$$

.... **[0.5]**

5)

$$\begin{aligned}
\vec{M}(C,1\rightarrow 0') &= \vec{M}(A,1\rightarrow 0') + \vec{F}'_{10}\wedge\vec{AC} = -\begin{pmatrix}0\\0\\Z'\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}d\\h\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}hZ'\\-dZ'\\0\end{pmatrix}\\
\vec{M}(C,1\rightarrow 0'') &= \vec{M}(A,1\rightarrow 0'') + \vec{F}''_{10}\wedge\vec{AB} = -\begin{pmatrix}0\\0\\Z''\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}d\\h\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}lZ''\\-eZ''\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

.... **[0.75]**

Les équations du **P.F.S.** sont donc :

$$\left\{\begin{array}{c}
X_e = 0\\
Y_e = 0\\
Z' + Z'' + Z''' + Z_e = 0\\
hZ' + lZ'' + L''' + L_e = 0\\
-dZ' - eZ'' + M_e = 0\\
N_e = 0
\end{array}\right.$$

Il y a 3 mobilités qui impose des conditions sur l'action extérieure ($X_e = Y_e = 0$ et $N_e = 0$).
Il ne reste plus que 3 équations à 4 inconnues Z', Z'', Z''' et L''' : le problème est donc hyperstatique d'ordre 1.
Il faudrait supprimer une liaison ponctuelle pour rendre ce système isostatique. .... **[3]**