Licence L2 - PCGS - Parcours Mécanique

UE Méca 1 - Résistance des Matériaux

$1^{\text{ère}}$ session 2021-2022 _ Durée : 2h00

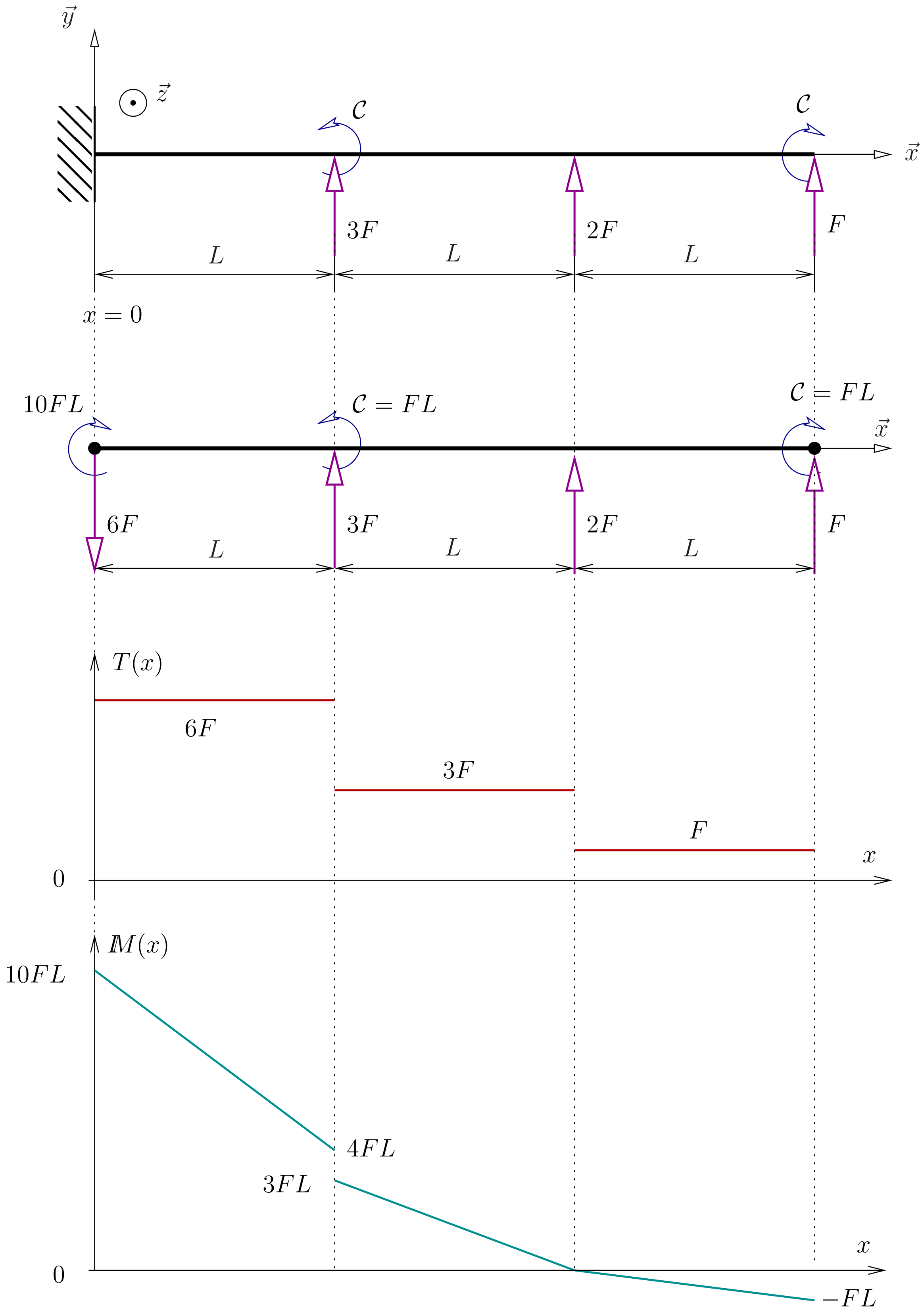
Responsable : L. Blanchard

Eléments de correction

Isolons toute la poutre et appliquons le **P.F.S.** (le dessin non effectué dans ce corrigé était à faire sur votre copie). On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} Y + 3F + 2F + F = 0 \\ K + \mathcal{C} - \mathcal{C} + 3F\,L + 2F\,2L + F\,3L = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} Y & = & -6F = -1176 \text{ N} \\ K & = & -10FL = -294 \text{ N.m} \end{array}\right.$$

.... **[2]**



En réalisant trois coupures et en isolant une portion de poutre, il vient les diagrammes. . . . . . **[1+2]**

Les dessins et les calculs non effectués dans ce corrigé étaient à rédiger sur votre copie. . . . . **[3]**

C'est en $x = 0$ que le moment fléchissant est maxi et vaut $10FL$. La contrainte maxi vaut alors :

$$\sigma_M = \frac{10FL}{I}\frac{h}{2} = \frac{10FL}{bh^3}12\frac{h}{2} = \frac{60FL}{bh^2} = 187.5 \text{ MPa}$$

.... **[0.75]**

Les points de cette section situés à $y = -\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en traction ; Ceux situés à $y = +\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en compression. .... **[0.75]**

On ne sort pas du domaine élastique : le coefficient de sécurité est $260/187.5 \approx 1.38$ .... **[0.5]**

La détermination de la flèche se fait à partir des relations et des conditions suivantes :

$x \in [0; L]$	$x \in [L; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$
$M(x) = -6Fx + 10FL$	$M(x) = F(3L - x) - FL + 2F(2L - x)$	$M(x) = F(3L - x) - FL$
$EIv"(x) = F(10L - 6x)$	$EIv"(x) = F(6L - 3x)$	$EIv"(x) = F(2L - x)$
$EIv'(x) = F\left(-6\frac{x^2}{2} + 10Lx + A\right)$	$EIv'(x) = F\left(-3\frac{x^2}{2} + 6Lx + B\right)$	$EIv'(x) = F\left(-\frac{x^2}{2} + 2Lx + D\right)$
$EIv(x) = F\left(-6\frac{x^3}{6} + 10L\frac{x^2}{2} + Ax + G\right)$	$EIv(x) = F\left(-3\frac{x^3}{6} + 6L\frac{x^2}{2} + Bx + H\right)$	$EIv(x) = F\left(-\frac{x^3}{6} + 2L\frac{x^2}{2} + Dx + J\right)$
$v'(0) = 0$		
$v(0) = 0$		

$v'(x)$ continu en $x = L$

$v(x)$ continu en $x = L$

$v'(x)$ continu en $x = 2L$

$v(x)$ continu en $x = 2L$

.... **[2]**

Les 6 conditions donnent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A & = & 0 \\ G & = & 0 \\ -6\frac{L^2}{2} + 10L^2 + A & = & -3\frac{L^2}{2} + 6L^2 + B \\ -6\frac{L^3}{6} + 10L\frac{L^2}{2} + AL + G & = & -3\frac{L^3}{6} + 6L\frac{L^2}{2} + BL + H \\ -3\frac{(2L)^2}{2} + 6L(2L) + B & = & -\frac{(2L)^2}{2} + 2L(2L) + D \\ -3\frac{(2L)^3}{6} + 6L\frac{(2L)^2}{2} + B(2L) + H & = & -\frac{(2L)^3}{6} + 2L\frac{(2L)^2}{2} + D(2L) + J \end{array}\right.$$

On ne gère que 4 équations :

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 7L^2 & = & \frac{9}{2}L^2 + B \\ 4L^3 & = & 5\frac{L^3}{2} + BL + H \\ 6L^2 + B & = & 2L^2 + D \\ 8L^3 + 2BL + H & = & \frac{8}{3}L^3 + 2DL + J \end{array}\right.$$

La $1^{\text{ère}}$ équation donne :

$$B = \frac{5}{2}L^2$$

La $3^{\text{ème}}$ équation donne alors :

$$D = 4L^2 + B = 4L^2 + \frac{5}{2}L^2 = \frac{13}{2}L^2$$

et la 2$^{\text{ème}}$ équation :

$$4L^3 = 5\frac{L^3}{2} + BL + H \quad \Longrightarrow \quad H = 4L^3 - 5L^3 = -L^3$$

et la 4$^{\text{ème}}$ équation :

$$\begin{aligned} 8L^3 + 2BL + H &= \frac{8}{3}L^3 + 2DL + J \\ 8L^3 + 5L^3 - L^3 &= \frac{8}{3}L^3 + 13L^3 + J \\ J &= -L^3 - \frac{8}{3}L^3 = -\frac{11}{3}L^3 \end{aligned}$$

.... **[3]**

On a finalement :

$x \in [0; L]$	$x \in [L; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$
$EIv(x) = F\left(-6\frac{x^3}{6} + 10L\frac{x^2}{2}\right)$	$EIv(x) = F\left(-3\frac{x^3}{6} + 6L\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}L^2x - L^3\right)$	$EIv(x) = F\left(-\frac{x^3}{6} + 2L\frac{x^2}{2} + \frac{13}{2}L^2x - \frac{11}{3}L^3\right)$
$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(-6x^3 + 30Lx^2\right)$	$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(-3x^3 + 18Lx^2 + 15L^2x - 6L^3\right)$	$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(-x^3 + 6Lx^2 + 39Lx - 22L^3\right)$

En posant la variable adimensionnelle $X = \frac{x}{L}$, la flèche adimensionnée $v^*(X) = \frac{6EIv(x)}{FL^3}$ est :

$X \in [0; 1]$	$X \in [1; 2]$	$X \in [2; 3]$
$v^*(X) = -6X^3 + 30X^2$	$v^*(X) = -3X^3 + 18X^2 + 15X - 6$	$v^*(X) = -X^3 + 6X^2 + 39X - 22$

.... **[2]**

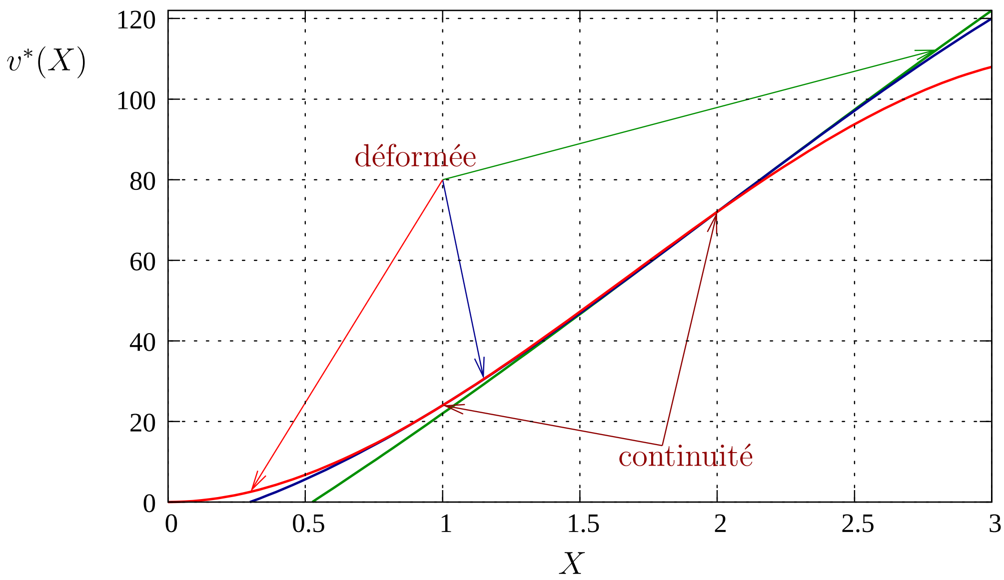


FIG. 1 – Les 3 fonctions, représentant la déformée, présentent une continuité et une pente continue en $X = 1$ et $X = 2$. Cette figure représente la déformée de la poutre amplifiée de 16.2 environ.

.... **[1.5]**

La flèche est maxi en $x = 3L$ ($X = 3$). On a $v^*(3) = 122$. La flèche maxi est :

$$v(3L) = \frac{122FL^3}{6EI} = \frac{61FL^3}{3EI} \approx 16.56 \text{ mm}$$

.... **[1.5]**

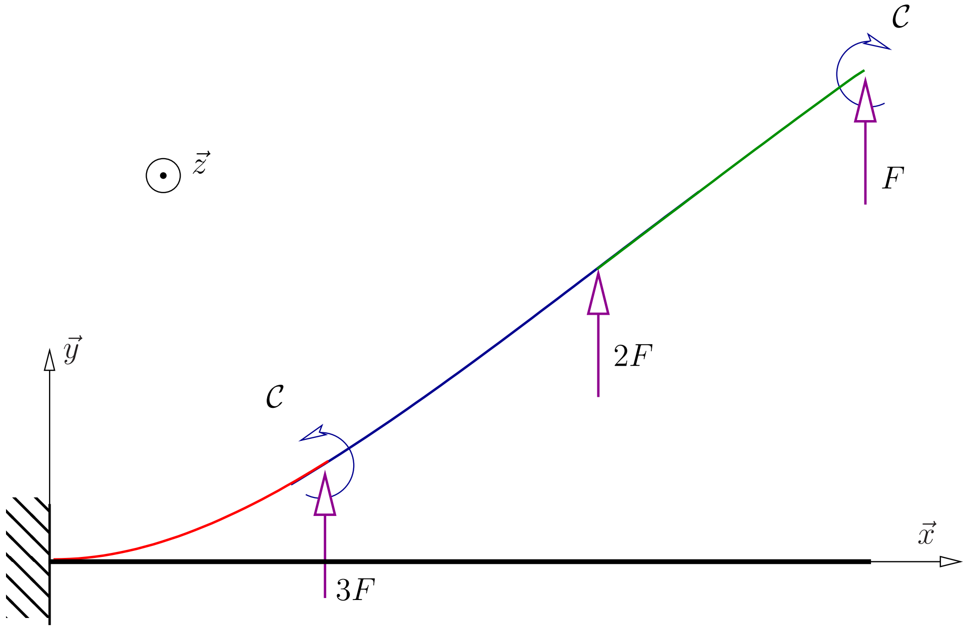


Fig. 2 – Déformée de la poutre amplifiée de 16.2 environ.