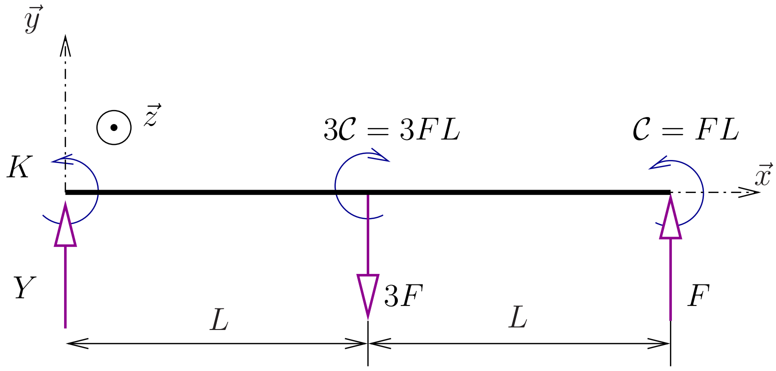
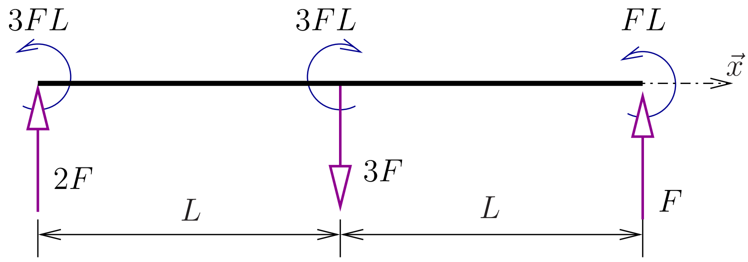
Exercice n°1 _ Flexion

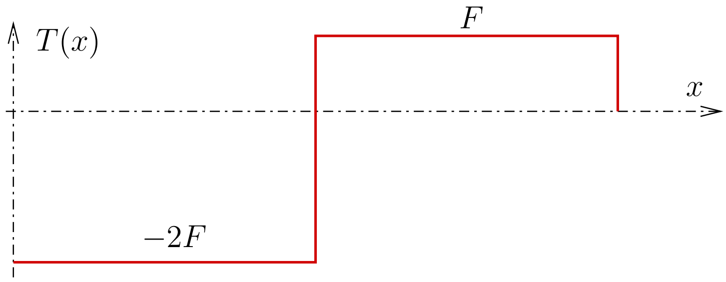


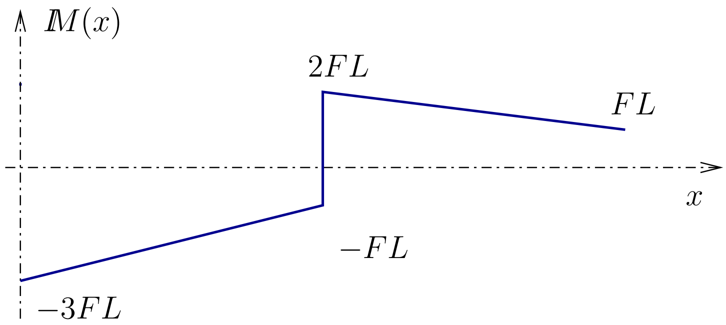
Le **P.F.S.** appliqué à toute la poutre (équation des moments en $x = 0$) donne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y - 3F + F & = & 0 \\ K + \mathcal{C} - 3\mathcal{C} + F\,2L - 3F\,L & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} Y & = & 2F = 1354 \text{ N} \\ K & = & 2\mathcal{C} + FL = 3FL = 528 \text{ N.m} \end{array} \right.$$

.... **[1]**







. . . . **[3]**

$$x \in [0 : L]$$
$$T(x) = -2F$$
$$M(x) = F(2x - 3L)$$
$$EIv'' = F(2x - 3L)$$
$$EIv' = F(x^2 - 3Lx + A)$$
$$\text{or } v'(0) = 0 \implies A = 0$$
$$EIv = F\left(\frac{x^3}{3} - 3L\frac{x^2}{2} + B\right)$$
$$\text{or } v(0) = 0 \implies B = 0$$
$$EIv(x) = F\left(\frac{x^3}{3} - 3L\frac{x^2}{2}\right)$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(2x^3 - 9Lx^2\right)$$

$$x \in [L : 2L]$$
$$T(x) = F$$
$$M(x) = F(3L - x)$$
$$EIv'' = F(3L - x)$$
$$EIv' = F\left(-\frac{1}{2}x^2 + 3Lx + D\right)$$
$$EIv = F\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{3L}{2}x^2 + Dx + G\right)$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(-x^3 + 9Lx^2 + 6Dx + 6G\right)$$

La continuité de la rotation de section droite (donc de $v'(x)$) en $x = L$ donne :

$$L^2 - 3L^2 = -\frac{1}{2}L^2 + 3L^2 + D \implies D = \frac{1}{2}L^2 - 5L^2 \implies D = -\frac{9}{2}L^2 \implies 6D = -27L^2$$

La continuité de la flèche (donc de $v(x)$) en $x = L$ donne :

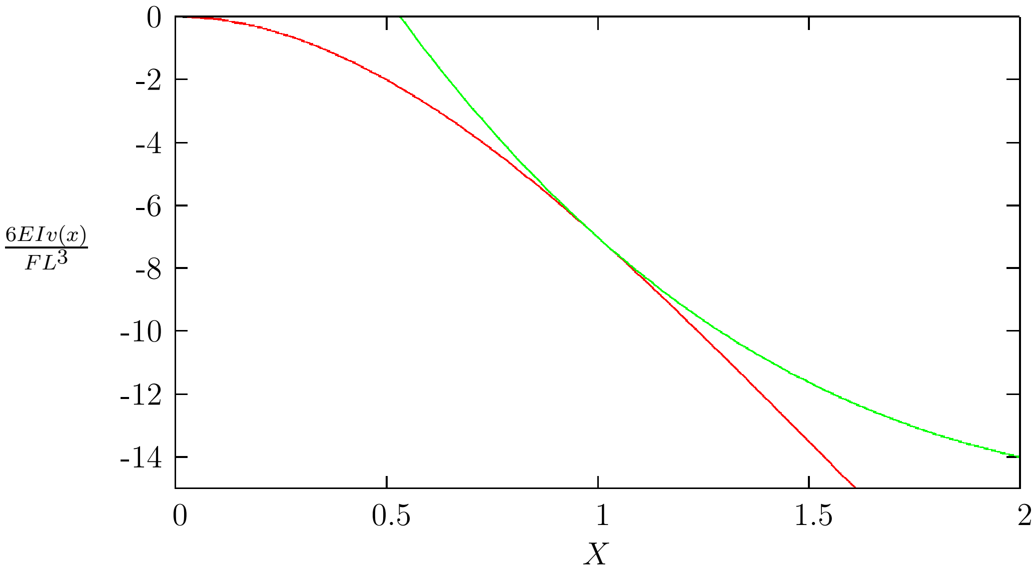
$$2L^3 - 9L^3 = -L^3 + 9L^3 + 6DL + 6G \quad \Longrightarrow \quad 6G = -7L^3 - 8L^3 + 6L\frac{9}{2}L^2 = (-15+27)L^3 = 12L^3$$

On obtient alors :

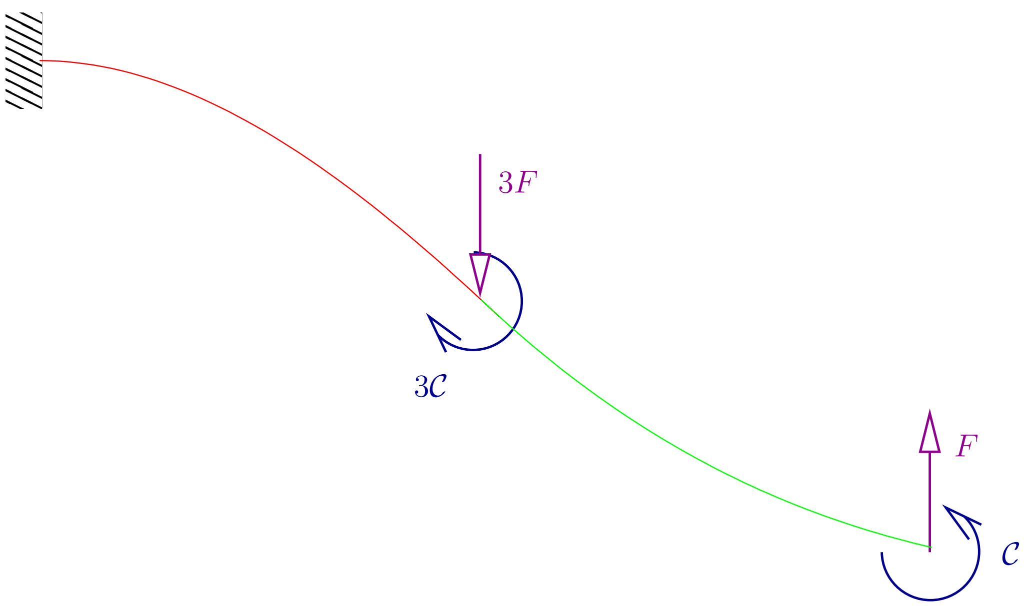
$$x \in [0:L], X = \frac{x}{L} \in [0:1]$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(2x^3 - 9Lx^2\right)$$
$$EIv(x) = \frac{FL^3}{6}\left(2X^3 - 9X^2\right)$$

$$x \in [L:2L], X = \frac{x}{L} \in [1:2]$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}(-x^3 + 9Lx^2 + 6Dx + 6G)$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}(-x^3 + 9Lx^2 - 27L^2x + 12L^3)$$
$$EIv(x) = \frac{FL^3}{6}\left(-X^3 + 9X^2 - 27X + 12\right)$$

Le tracé des 2 courbes adimensionnées $\frac{6EIv(x)}{FL^3}$ donne :



soit une allure de déformée amplifiée par environ 20.8 :



$$v(2L) = -\frac{14FL^3}{6EI} = -\frac{7FL^3}{3EI} \approx -6.93 \text{ mm}$$

.... **[5.5]**

Le moment fléchissant est maximum en $x = 0$ et vaut : $\mathbb{M}(0) = -3FL$.
La contrainte de tension est maximum en $x = 0$ et en $y = \pm\frac{h}{2}$ et vaut :

$$\sigma_M = \frac{3FL}{\frac{1}{12}bh^3}\frac{h}{2} = \frac{18FL}{bh^2} = 110.01 \text{ MPa} < R_e = 120 \text{ MPa}$$

Le coefficient de sécurité est environ 1.090.

- Pour $x = 0$ et $y = \frac{h}{2}$: traction ;
- Pour $x = 0$ et $y = -\frac{h}{2}$: compression ;

.... **[1.5]**

N.B. :
Moment quadratique :

$$I = \frac{bh^3}{12} = 57600 \text{ mm}^4$$

Exercice n°2 – Comparaison de 2 sections en torsion

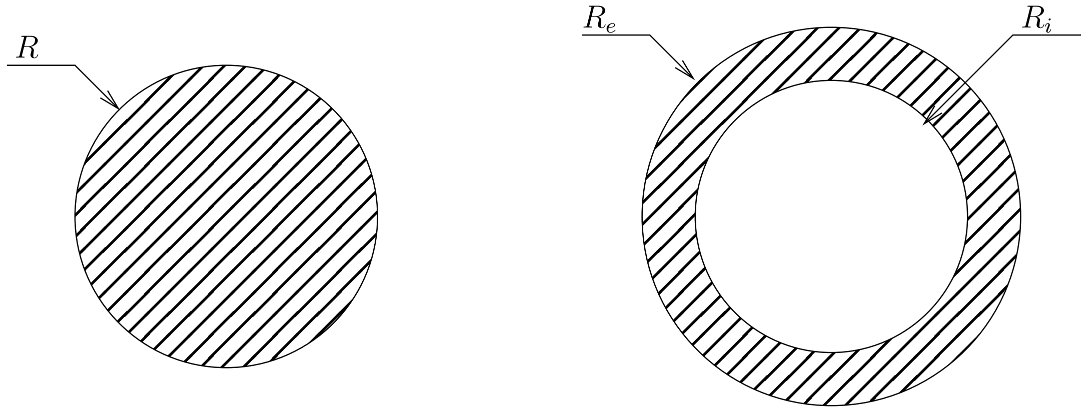


FIG. 1 – Deux sections droites de poutre soumise à un moment de torsion (indice 1 pour la section pleine à gauche et indice 2 pour la section creuse à droite).

1) Les masses :

$$m_1 = \rho\pi R^2 L \qquad \text{et} \qquad m_2 = \rho\pi(R_e^2 - R_i^2)L \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{R^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

.... **[0.5]**

2) Les moments quadratiques :

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^R r^3\mathrm{d}r = 2\pi\frac{R^4}{4} = \pi\frac{R^4}{2} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \pi\frac{R_e^4 - R_i^4}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R^4}{R_e^4 - R_i^4}$$

.... **[0.5]**

3) Les contraintes maximum de cisaillement :

$$\tau_1 = \frac{M_T}{I_1} R = \frac{2M_T}{\pi R^3} \qquad \text{et} \qquad \tau_2 = \frac{M_T}{I_2} R_e = \frac{2M_T}{\pi(R_e^4 - R_i^4)} R_e \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{R_e R^3}$$

. . . . **[1]**

4) Les rotations de section droite :

$$M_T = GI_1\theta_1' = GI_1\frac{\theta_1}{L} \quad \Longrightarrow \quad \theta_1 = \frac{M_T L}{GI_1} = \frac{2M_T L}{G\pi R^4} \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = \frac{M_T L}{GI_2} = \frac{2M_T L}{G\pi(R_e^4 - R_i^4)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{R^4}$$

. . . . **[1]**

5) On donne $R_e = 50$ mm et $R_i = 40$ mm et l'on souhaite avoir $\theta_1 = \theta_2$ donc :

$$R^4 = R_e^4 - R_i^4 \quad \Longrightarrow \quad R = 43.83 \text{ mm}$$

On a alors :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R^2}{R_e^2 - R_i^2} = 2.13$$

et

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{R^3}{(R_e^4 - R_i^4)} R_e = 0.88 = 1.14^{-1}$$

Cette poutre creuse est (moins de la) moitié moins lourde, se déforme de façon identique à la poutre pleine mais subit une contrainte maxi 1.14 fois supérieure. . . . . **[2]**

6) On donne $R_e = 50$ mm et $R_i = 40$ mm et l'on souhaite avoir $\tau_1 = \tau_2$ donc :

$$R^3 = \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{R_e} \quad \Longrightarrow \quad R = 41.95 \text{ mm}$$

On a alors :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R^2}{R_e^2 - R_i^2} = 1.95$$

et

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{R^4} = 1.19$$

Cette poutre pleine est presque deux fois plus lourde, subit la même contrainte maxi et se déforme 1.19 fois plus que la poutre creuse. . . . . **[2]**

7) On donne $R_e = 50$ mm et $R_i = 40$ mm et l'on souhaite avoir $m_1 = m_2$ donc :

$$R^2 = R_e^2 - R_i^2 \quad \Longrightarrow \quad R = 30 \text{ mm}$$

On a alors :

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{R_e R^3} = 2.73$$

et

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{R^4} = 4.56$$

Cette poutre pleine de même masse que cette poutre creuse, subit une contrainte maxi 2.7 plus importante et se déforme 4.5 fois plus. . . . . **[2]**