UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Licence L2 - PCGS - Parcours Mécanique

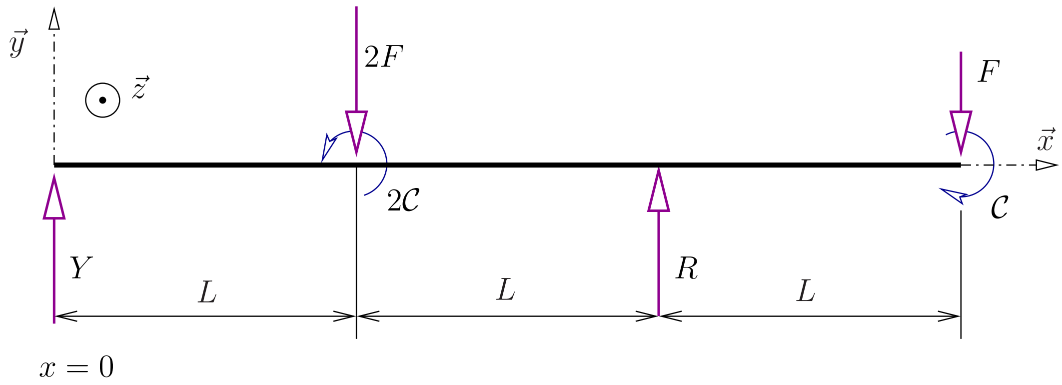
UE Méca 1 - Résistance des Matériaux

1ère session 2019-2020 _ Durée : 2h00

Responsable : L. Blanchard

Eléments de correction

Isolons toute la poutre et appliquons le **P.F.S.** .



On obtient (moments en $x = 0$ et $x = 2L$) :

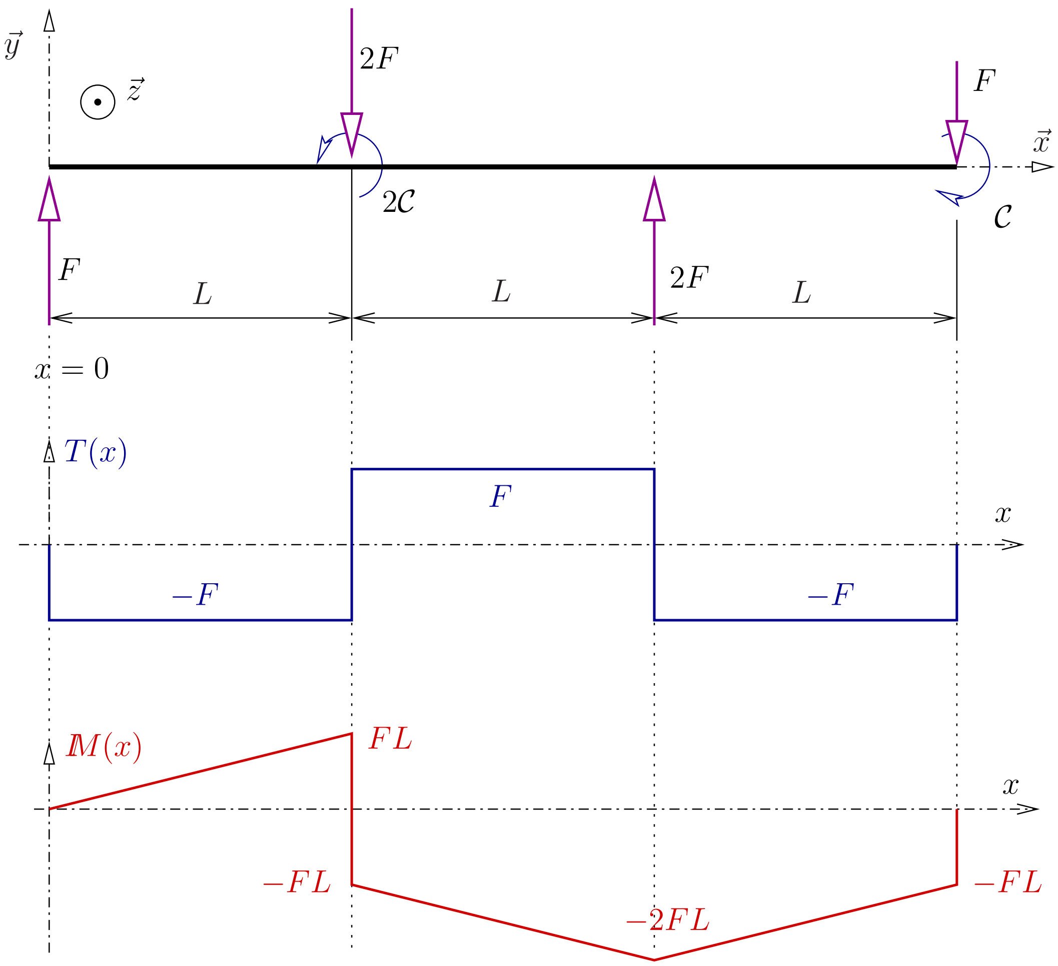
$$\begin{cases} -F3L - C + R2L + 2C - 2FL = 0 \\ -Y2L + 2FL + 2C - C - FL = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R = 2F = 1600 \text{ N} \\ Y = F = 800 \text{ N} \end{cases}$$

.... **[2]**

On vérifie :

$$R + Y - 2F - F = 0$$

En réalisant trois coupures et en isolant une portion de poutre, il vient les diagrammes suivant :



avec

$x \in [0; L]$	$x \in [L; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$
$T(x) = -F$	$T(x) = +F$	$T(x) = -F$
$I\!M(x) = Fx$	$I\!M(x) = -Fx$	$I\!M(x) = F(x - 4L)$

. . . . **[6]**

C'est en $x = 2L$ que le moment fléchissant est maxi et vaut $-2FL$. La contrainte maxi vaut alors :

$$\sigma_M = \frac{2FL}{I}\frac{h}{2} = \frac{2FL}{bh^3}12\frac{h}{2} = \frac{12FL}{bh^2} = 115 \text{ MPa}$$

. . . . **[1]**

Les points situés à $x = 2L$ et $y = +\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en traction ; Ceux situés à $y = -\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en compression.

On ne sort pas du domaine élastique : le coefficient de sécurité est $\frac{230}{115} = 2$. . . . . **[1]**

La détermination de la flèche se fait à partir des relations et des conditions suivantes :

$$
\begin{array}{c|c|c}
x \in [0;L] & x \in [L;2L] & x \in [2L;3L] \\
M\!\!M(x) = EIv"(x) = Fx & M\!\!M(x) = EIv"(x) = -Fx & M\!\!M(x) = EIv"(x) = F(x-4L) \\
EIv'(x) = F\left(\frac{x^2}{2} + A\right) & EIv'(x) = F\left(-\frac{x^2}{2} + D\right) & EIv'(x) = F\left(\frac{x^2}{2} - 4Lx + H\right) \\
EIv(x) = F\left(\frac{x^3}{6} + Ax + B\right) & EIv(x) = F\left(-\frac{x^3}{6} + Dx + G\right) & EIv(x) = F\left(\frac{x^3}{6} - 4L\frac{x^2}{2} + Hx + J\right)
\end{array}
$$

avec les conditions limites

$$v(0) = 0$$

$$v(x) \text{ continu en } x = L$$

$$v'(x) \text{ continu en } x = L$$

$$v(2L) = 0 \qquad\qquad v(2L) = 0$$

$$v'(x) \text{ continu en } x = 2L$$

.... **[2]**

Ces 6 conditions donnent ces 6 équations :

$$
\begin{cases}
B = 0 \\
\frac{L^3}{6} + AL + B = -\frac{L^3}{6} + DL + G \\
\frac{L^2}{2} + A = -\frac{L^2}{2} + D \\
-\frac{(2L)^3}{6} + D2L + G = 0 \\
\frac{(2L)^3}{6} - 4L\frac{(2L)^2}{2} + H2L + J = 0 \\
-\frac{(2L)^2}{2} + D = \frac{(2L)^2}{2} - 4L(2L) + H
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
B = 0 \\
AL = -\frac{L^3}{3} + DL + G \\
A + L^2 = D \\
-\frac{4}{3}L^3 + 2DL + G = 0 \\
-\frac{20}{3}L^3 + 2HL + J = 0 \\
D = H - 4L^2
\end{cases}
$$

De la troisième équation, on déduit :

$$D = A + L^2$$

que l'on relance dans la deuxième équation :

$$AL = -\frac{L^3}{3} + AL + L^3 + G \quad \Longrightarrow \quad G = -\frac{2L^3}{3}$$

La quatrième équation donne alors :

$$-\frac{4}{3}L^3 + 2DL - \frac{2L^3}{3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = L^2$$

La sixième équation donne alors :

$$H = D + 4L^2 = 5L^2$$

La troisième équation donne alors :

$$A = 0$$

La cinquième équation donne alors :

$$-\frac{20}{3}L^3 + 10L^3 + J = 0 \quad \Longrightarrow \quad J = -\frac{10L^3}{3}$$

.... **[3]**

On a finalement :

$x \in [0; L]$	$x \in [L; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$
$EIv(x) = F\left(\frac{x^3}{6}\right)$	$EIv(x) = F\left(-\frac{x^3}{6} + L^2x - \frac{2L^3}{3}\right)$	$EIv(x) = F\left(\frac{x^3}{6} - 2Lx^2 + 5L^2x - \frac{10L^3}{3}\right)$
$EIv(x) = \frac{F}{6}(x^3)$	$EIv(x) = \frac{F}{6}(-x^3 + 6L^2x - 4L^3)$	$EIv(x) = \frac{F}{6}(x^3 - 12Lx^2 + 30L^2x - 20L^3)$

En posant la variable adimensionnelle $X = \frac{x}{L}$, la flèche adimensionnée $v^*(X) = \frac{6EIv(x)}{FL^3}$ est :

$X \in [0; 1]$	$X \in [1; 2]$	$X \in [2; 3]$
$v^*(X) = X^3$	$v^*(X) = (-X^3 + 6X - 4)$	$v^*(X) = (X^3 - 12X^2 + 30X - 20)$

.... **[2]**

La flèche est maxi en $x = 3L$ ($X = 3$). On a $v^*(3) = -11$. La flèche maxi est :

$$|v(3L)| = \frac{11FL^3}{6EI} = 20.55 \text{ mm}$$

.... **[1.5]**

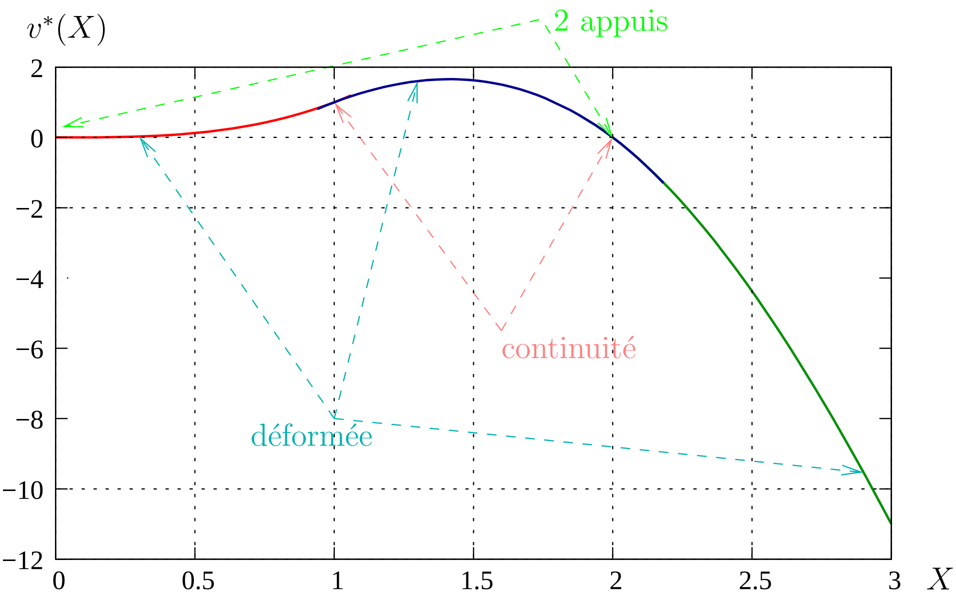


FIG. 1 – Les 3 fonctions, représentant la déformée, présentent une continuité et une pente continue en $X = 1$ et $X = 2$. Cette figure représente la déformée de la poutre amplifiée de 40 environ.

.... **[1.5]**

N.B. : La solution trouvée est telle que $v'(0) = 0$ car $A = 0$ alors qu'il n'y a pas d'encastrement en $x = 0$ mais un appui simple. Les valeurs des efforts extérieurs sont telles qu'il n'y a pas de rotation sur cet appui.