Licence L2 - PCGS - Parcours Mécanique

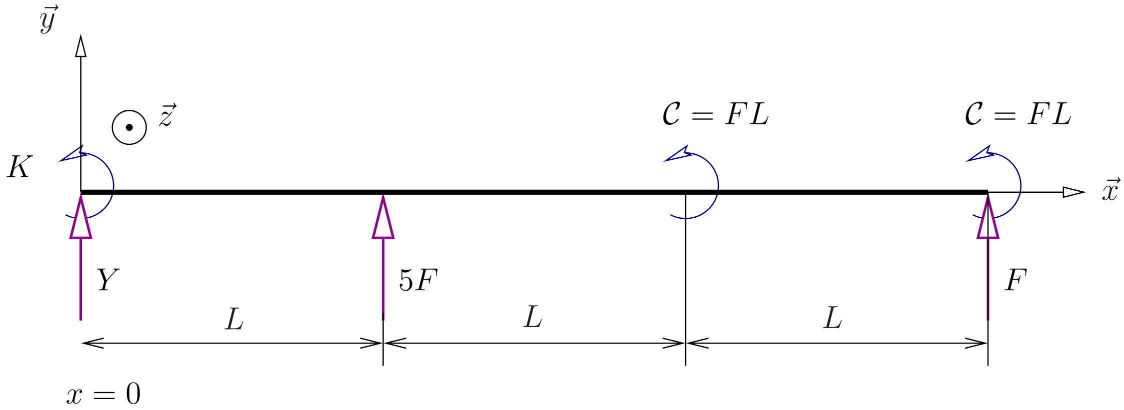
UE Méca 1 - Résistance des Matériaux

1ère session 2018-2019 _ Durée : 2h00

Responsable : L. Blanchard

Eléments de correction

Isolons toute la poutre et appliquons le **P.F.S.** .

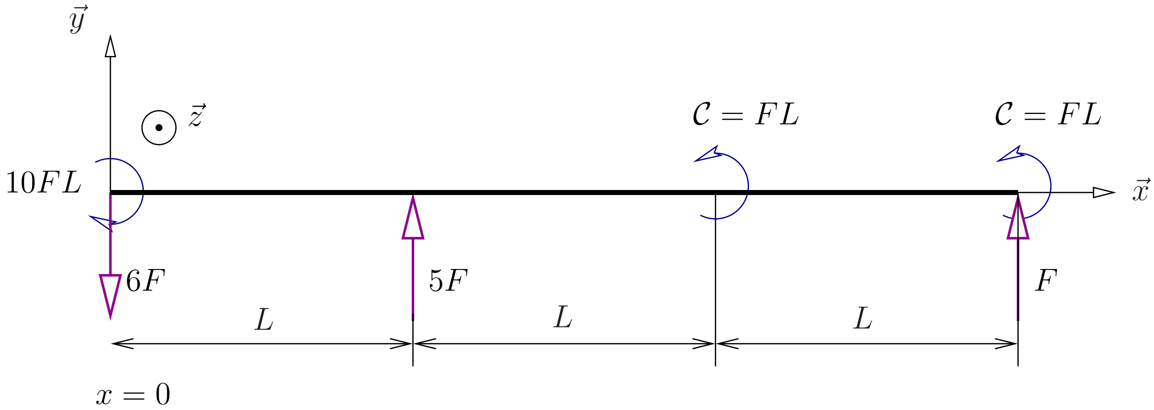


On obtient :

$$\begin{cases} Y + 5F + F = 0 \\ K + \mathcal{C} + \mathcal{C} + 5F\,L + F\,3L = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Y &= -6F = -38400 \text{ N} \\ K &= -2\mathcal{C} - 8FL = -10FL = -25600 \text{ N.m} \end{cases}$$

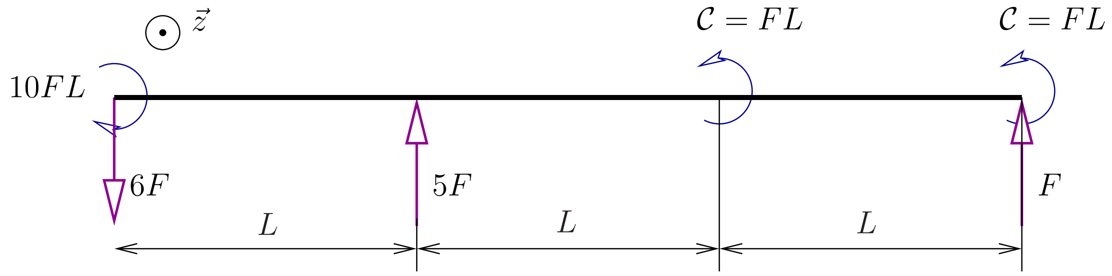
.... **[2]**

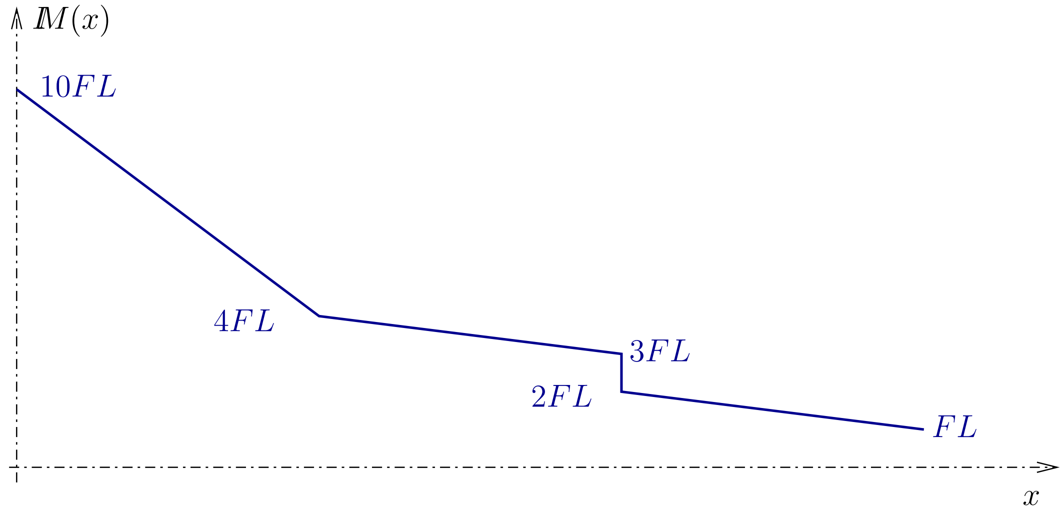
d'où la solution :



En réalisant trois coupures et en isolant une portion de poutre, il vient les diagrammes suivant :

Les calculs non écrits dans ce corrigé étaient à rédiger sur votre copie .... **[3]**





. . . . **[1+2]**

C'est en $x = 0$ que le moment fléchissant est maxi et vaut $10FL$. La contrainte maxi vaut alors :

$$\sigma_M = \frac{10FL}{I}\frac{h}{2} = \frac{10FL}{bh^3}12\frac{h}{2} = \frac{60FL}{bh^2} = 400 \text{ MPa}$$

. . . . **[0.75]**

Les points de cette section situés à $y = -\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en traction ; Ceux situés à $y = +\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en compression. . . . . **[0.75]**

On ne sort pas du domaine élastique : le coefficient de sécurité est $450/400 = 1.125$ . . . . **[0.5]**

La détermination de la flèche se fait à partir des relations et des conditions suivantes :

$x \in [0;L]$	$x \in [L;2L]$	$x \in [2L;3L]$
$M(x) = EIv"(x) = -F(6x - 10L)$	$M(x) = EIv"(x) = -F(x - 5L)$	$M(x) = EIv"(x) = -F(x - 4L)$
$EIv'(x) = -F\left(6\frac{x^2}{2} - 10Lx + A\right)$	$EIv'(x) = -F\left(\frac{x^2}{2} - 5Lx + B\right)$	$EIv'(x) = -F\left(\frac{x^2}{2} - 4Lx + D\right)$
$EIv(x) = -F\left(6\frac{x^3}{6} - 10L\frac{x^2}{2} + Ax + G\right)$	$EIv(x) = -F\left(\frac{x^3}{6} - 5L\frac{x^2}{2} + Bx + H\right)$	$EIv(x) = -F\left(\frac{x^3}{6} - 4L\frac{x^2}{2} + Dx + J\right)$
$v'(0) = 0$		
$v(0) = 0$		

$v'(x)$ continu en $x = L$

$v(x)$ continu en $x = L$

$v'(x)$ continu en $x = 2L$

$v(x)$ continu en $x = 2L$

.... **[2]**

Les 6 conditions donnent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A &=& 0 \\ G &=& 0 \\ 6\frac{L^2}{2} - 10L^2 + A &=& \frac{L^2}{2} - 5L^2 + B \\ 6\frac{L^3}{6} - 10L\frac{L^2}{2} + AL + G &=& \frac{L^3}{6} - 5L\frac{L^2}{2} + BL + H \\ \frac{4L^2}{2} - 10L^2 + B &=& \frac{4L^2}{2} - 8L^2 + D \\ \frac{8L^3}{6} - 5L\frac{4L^2}{2} + 2BL + H &=& \frac{8L^3}{6} - 4L\frac{4L^2}{2} + 2DL + J \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A &=& 0 \\ G &=& 0 \\ -7L^2 &=& -\frac{9L^2}{2} + B \\ -4L^3 &=& -\frac{14L^3}{6} + BL + H \\ -8L^2 + B &=& -6L^2 + D \\ \frac{4L^3}{3} - 10L\frac{3L^2}{3} + 2BL + H &=& \frac{4L^3}{3} - 8L\frac{3L^2}{3} + 2DL + J \end{array}\right.$$

La 3$^{\text{ème}}$ équation donne :

$$B = -\frac{5L^2}{2}$$

La 4$^{\text{ème}}$ équation donne alors :

$$H = -\frac{5L^3}{3} - BL = -\frac{5L^3}{3} + \frac{5L^3}{2} = \frac{5L^3}{6}$$

et la 5$^{\text{ème}}$ équation :

$$D = -2L^2 + B = -2L^2 - \frac{5L^2}{2} = -\frac{9L^2}{2}$$

On peut alors gérer la 6$^{\text{ème}}$ équation :

$$-\frac{26L^3}{3} + 2BL + H \quad = \quad -\frac{20L^3}{3} + 2DL + J$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{6L^3}{3} - 2\frac{5L^2}{2}L + \frac{5L^3}{6} = -2\frac{9L^2}{2}L + J$$

$$\Longrightarrow \quad -2L^3 - 5L^3 + \frac{5L^3}{6} = -9L^3 + J$$

$$\Longrightarrow \quad J = 2L^3 + \frac{5L^3}{6} \quad \Longrightarrow \quad J = \frac{17L^3}{6}$$

.... **[3]**

On a finalement :

$x \in [0; L]$	$x \in [L; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$
$EIv(x) = -F\left(6\frac{x^3}{6} - 10L\frac{x^2}{2}\right)$	$EIv(x) = -F\left(\frac{x^3}{6} - 5L\frac{x^2}{2} - \frac{5L^2}{2}x + \frac{5L^3}{6}\right)$	$EIv(x) = -F\left(\frac{x^3}{6} - 4L\frac{x^2}{2} - \frac{9L^2}{2}x + \frac{17L^3}{6}\right)$
$EIv(x) = -\frac{F}{6}\left(6x^3 - 30Lx^2\right)$	$EIv(x) = -\frac{F}{6}\left(x^3 - 15Lx^2 - 15L^2x + 5L^3\right)$	$EIv(x) = -\frac{F}{6}\left(x^3 - 12Lx^2 - 27L^2x + 17L^3\right)$

En posant la variable adimensionnelle $X = \frac{x}{L}$, la flèche adimensionnée $v^*(X) = \frac{6EIv(x)}{FL^3}$ est :

$X \in [0; 1]$	$X \in [1; 2]$	$X \in [2; 3]$
$v^*(X) = -\left(6X^3 - 30X^2\right)$	$v^*(X) = -\left(X^3 - 15X^2 - 15X + 5\right)$	$v^*(X) = -\left(X^3 - 12X^2 - 27X + 17\right)$

.... **[2]**

La flèche est maxi en $x = 3L$ ($X = 3$). On a $v^*(3) = 145$. La flèche maxi est :

$$v(3L) = \frac{145FL^3}{6EI} = 18.4 \text{ mm}$$

.... **[1.5]**

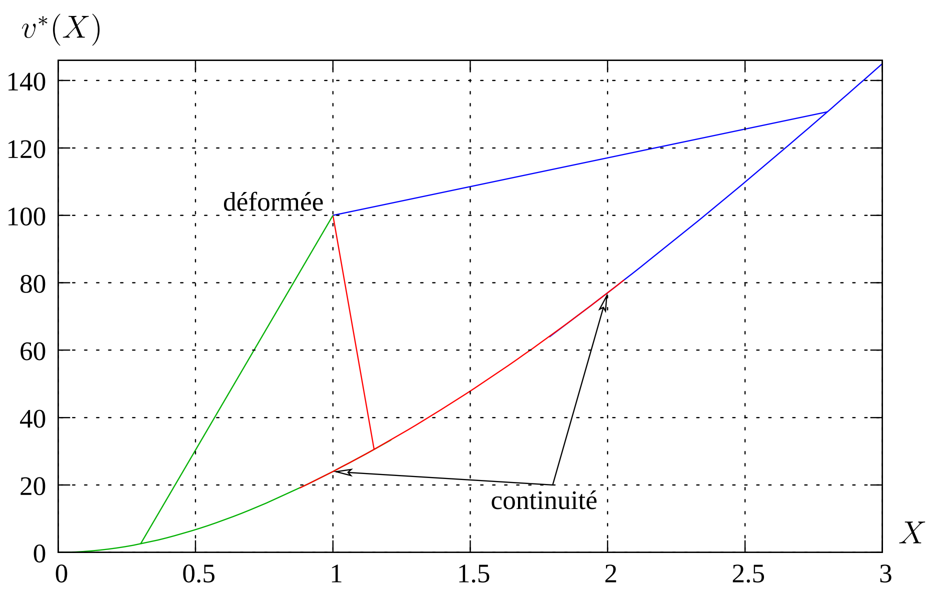


FIG. 1 – Les 3 fonctions, représentant la déformée, présentent une continuité et une pente continue en $X = 1$ et $X = 2$. Cette figure représente la déformée de la poutre amplifiée de 39 environ.

.... **[1.5]**