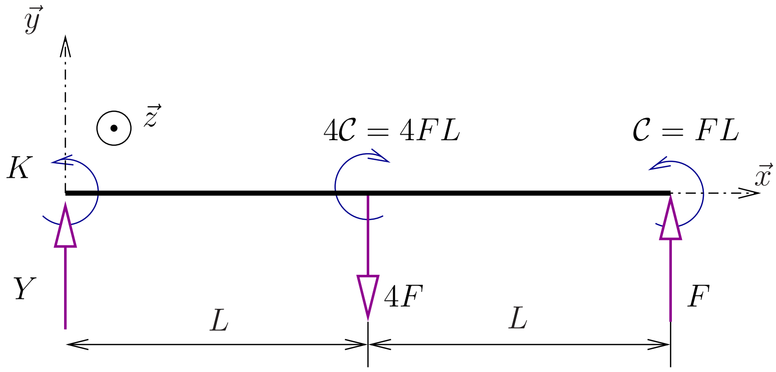
L2 - Parcours Mécanique

UE Méca 1 - Résistance des Matériaux

2nde session 2017-2018 _ Durée : 1h00

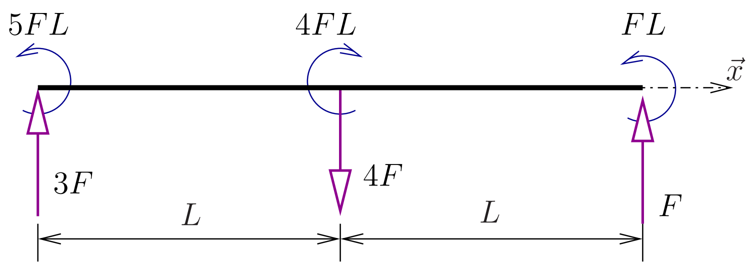
Responsable : L. Blanchard

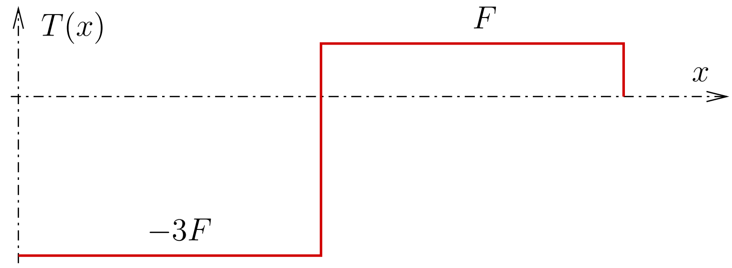
Eléments de correction

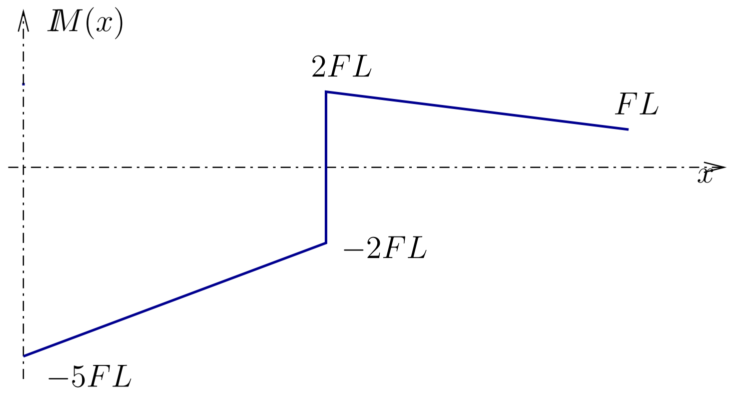


Le **P.F.S.** appliqué à toute la poutre (équation des moments en $x = 0$) donne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y - 4F + F & = & 0 \\ K + \mathcal{C} - 4\mathcal{C} + F\,2L - 4F\,L & = & 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{rcl} Y & = & 3F = 1275 \text{ N} \\ K & = & 3\mathcal{C} + 2FL = 5FL = 552.5 \text{ N.m} \end{array} \right.$$







$$x \in [0:L]$$
$$T(x) = -3F$$
$$M(x) = F(3x - 5L)$$
$$EIv" = F(3x - 5L)$$
$$EIv' = F(\frac{3}{2}x^2 - 5Lx + A)$$
$$\text{or } v'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 0$$
$$EIv = F\left(\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - 5L\frac{1}{2}x^2 + B\right)$$
$$\text{or } v(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 0$$
$$EIv(x) = F\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}Lx^2\right)$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(3x^3 - 15Lx^2\right)$$

$$x \in [L:2L]$$
$$T(x) = F$$
$$M(x) = F(3L - x)$$
$$EIv" = F(3L - x)$$
$$EIv' = F\left(-\frac{1}{2}x^2 + 3Lx + D\right)$$
$$EIv = F\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3L}{2}x^2 + Dx + G\right)$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(-x^3 + 9Lx^2 + 6Dx + 6G\right)$$

La continuité de la rotation de section droite (donc de $v'(x)$) en $x = L$ donne :

$$\frac{3}{2}L^2 - 5L^2 = -\frac{1}{2}L^2 + 3L^2 + D \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{3}{2}L^2 - 5L^2 + \frac{1}{2}L^2 - 3L^2 \quad \Longrightarrow \quad D = -6L^2$$

La continuité de la flèche (donc de $v(x)$) en $x = L$ donne :

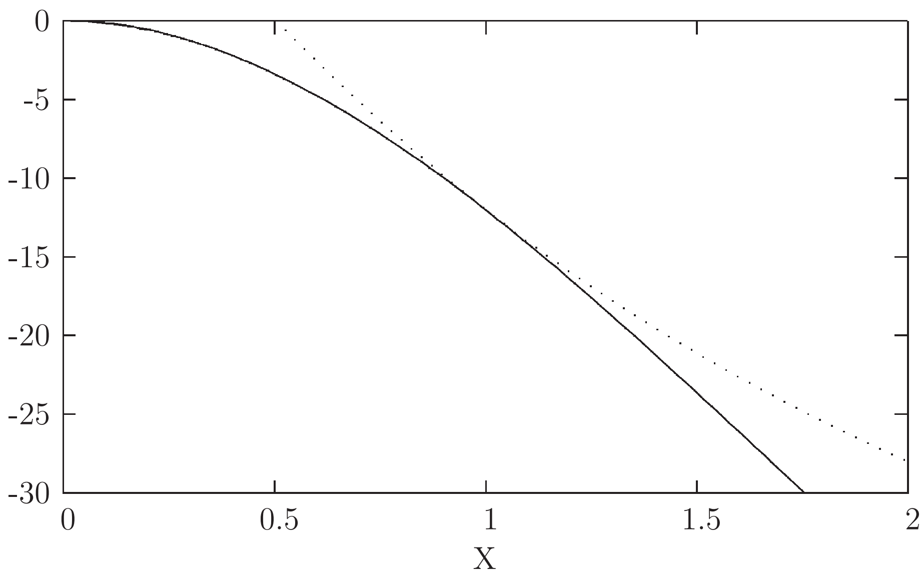
$$3L^3 - 15L^3 = -L^3 + 9L^3 + 6DL + 6G \quad \Longrightarrow \quad 6G = -12L^3 - 8L^3 + 36L^3 = 16L^3 \quad \Longrightarrow \quad G = \frac{8}{3}L^3$$

On obtient alors :

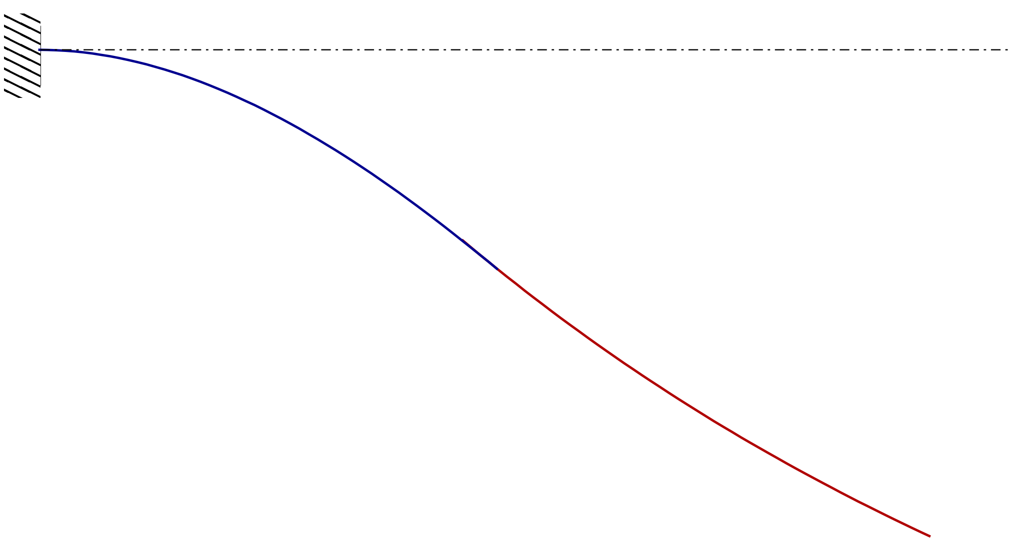
$$x \in [0:L], X = \frac{x}{L} \in [0:1]$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(3x^3 - 15Lx^2\right)$$
$$EIv(X) = \frac{FL^3}{6}\left(3X^3 - 15X^2\right)$$

$$x \in [L:2L], X = \frac{x}{L} \in [1:2]$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(-x^3 + 9Lx^2 + 6(-6L^2)x + 6\frac{8}{3}L^3\right)$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(-x^3 + 9Lx^2 - 36L^2x + 16L^3\right)$$
$$EIv(X) = \frac{FL^3}{6}\left(-X^3 + 9X^2 - 36X + 16\right)$$

Le tracé des 2 courbes adimensionnées $\frac{6EIv(X)}{FL^3}$ donne :



soit une allure de déformée amplifiée par environ 15.6 :



$$v(2L) = -\frac{28FL^3}{6EI} = -\frac{14FL^3}{3EI} \approx -8.7 \text{ mm}$$

Le moment fléchissant est maximum en $x = 0$ et vaut : $M(0) = -5FL$.
La contrainte de tension est maximum en $x = 0$ et en $y = \pm\frac{h}{2}$ et vaut :

$$\sigma_M = \frac{5FL}{\frac{1}{12}bh^3}\frac{h}{2} = \frac{30FL}{bh^2} = 115.1 \text{ MPa} < R_e = 120 \text{ MPa}$$

Le coefficient de sécurité est environ 1.042.

- Pour $x = 0$ et $y = \frac{h}{2}$: traction ;
- Pour $x = 0$ et $y = -\frac{h}{2}$: compression ;

N.B. :
Moment quadratique :

$$I = \frac{bh^3}{12} = 57600 \text{ mm}^4$$