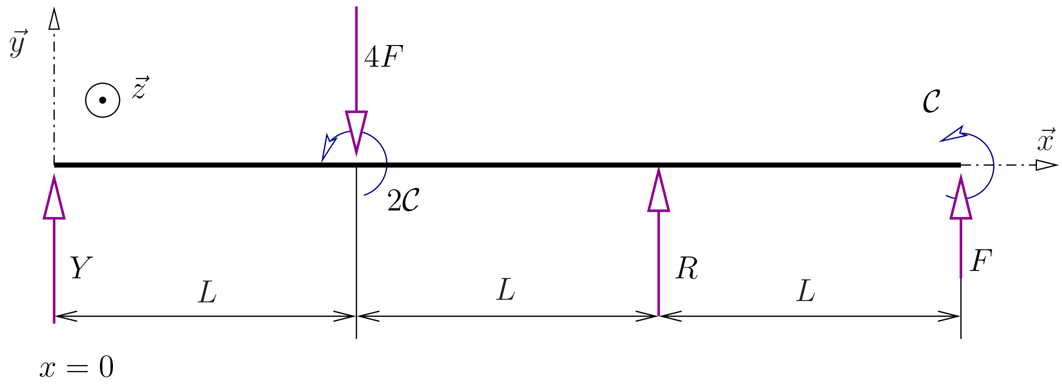
Isolons toute la poutre et appliquons le **P.F.S.** .



On obtient (moments en $x = 0$ et $x = 2L$) :

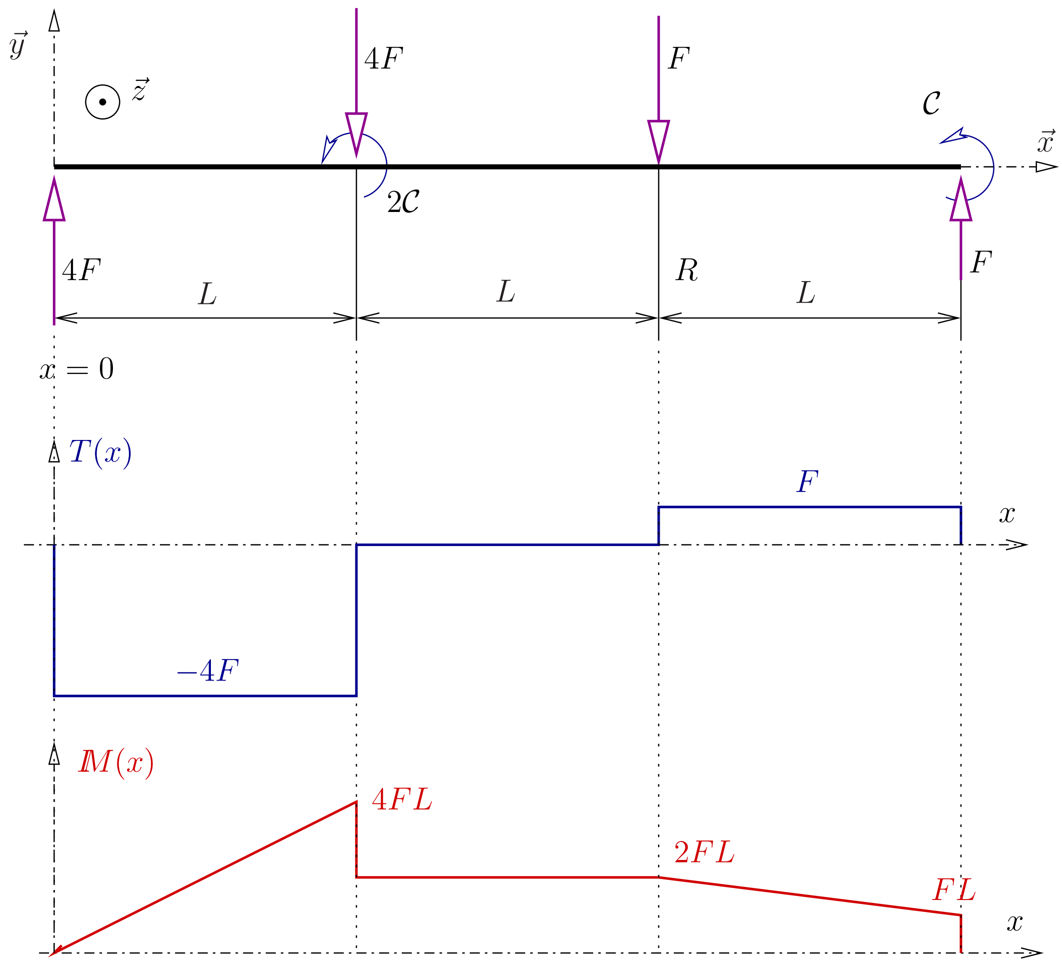
$$\begin{cases} F3L + C + R2L + 2C - 4FL = 0 \\ -Y2L + 4FL + 2C + C + FL = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R = -F = -1100 \text{ N} \\ Y = 4F = 4400 \text{ N} \end{cases}$$

.... **[2]**

On vérifie :

$$R + Y - 4F + F = 0$$

En réalisant trois coupures et en isolant une portion de poutre il vient les diagrammes suivant :



avec

$x \in [0; L]$	$x \in [L; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$
$T(x) = -4F$	$T(x) = 0$	$T(x) = F$
$M(x) = 4Fx$	$M(x) = 2FL$	$M(x) = F(-x + 4L)$

.... **[6]**

C'est en $x = L$ que le moment fléchissant est maxi et vaut $4FL$. La contrainte maxi vaut alors :

$$\sigma_M = \frac{4FL}{I}\frac{h}{2} = \frac{4FL}{bh^3}12\frac{h}{2} = \frac{24FL}{bh^2} = 211 \text{ MPa}$$

.... **[1]**

Les points situés à $x = L$ et $y = -\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en traction ; Ceux situés à $y = +\frac{h}{2}$ subissent la contrainte maxi en compression.

On ne sort pas du domaine élastique : le faible coefficient de sécurité est $\frac{260}{211} = 1.23$. .... **[1]**

La détermination de la flèche se fait à partir des relations et des conditions suivantes :

$x \in [0;L]$	$x \in [L;2L]$	$x \in [2L;3L]$
$\mathbb{M}(x) = EIv''(x) = 4Fx$	$\mathbb{M}(x) = EIv''(x) = 2FL$	$\mathbb{M}(x) = EIv''(x) = F(-x+4L)$
$EIv'(x) = F\left(4\frac{x^2}{2} + A\right)$	$EIv'(x) = F\left(2Lx + D\right)$	$EIv'(x) = F\left(-\frac{x^2}{2} + 4Lx + H\right)$
$EIv(x) = F\left(4\frac{x^3}{6} + Ax + B\right)$	$EIv(x) = F\left(2L\frac{x^2}{2} + Dx + G\right)$	$EIv(x) = F\left(-\frac{x^3}{6} + 4L\frac{x^2}{2} + Hx + J\right)$

avec les conditions limites

$v(0) = 0$

$v(x)$ continu en $x = L$

$v'(x)$ continu en $x = L$

$v(2L) = 0$ | $v(2L) = 0$

$v'(x)$ continu en $x = 2L$

.... **[2]**

Ces 6 conditions donnent ces 6 équations :

$$\begin{cases} B = 0 \\ 4\frac{L^3}{6} + AL + B = 2L\frac{L^2}{2} + DL + G \\ 4\frac{L^2}{2} + A = 2L^2 + D \\ 2L\frac{(2L)^2}{2} + 2DL + G = 0 \\ -\frac{(2L)^3}{6} + 4L\frac{(2L)^2}{2} + 2HL + J = 0 \\ 2L2L + D = -\frac{(2L)^2}{2} + 4L2L + H \end{cases} \implies \begin{cases} AL = \frac{L^3}{3} + DL + G \\ A = D \\ 4L^3 + 2DL + G = 0 \\ \frac{20}{3}L^3 + 2HL + J = 0 \\ D = H + 2L^2 \end{cases}$$

Des 2 premières équations, on déduit :

$$G = -\frac{L^3}{3}$$

La troisième équation donne alors :

$$2DL = -G - 4L^3 = -\frac{11L^3}{3} \implies D = -\frac{11L^2}{6}$$

La cinquième équation donne alors :

$$H = D - 2L^2 = -\frac{11L^2}{6} - \frac{12L^2}{6} = -\frac{23L^2}{6}$$

La quatrième équation donne alors :

$$J = -\frac{20}{3}L^3 - 2HL = -\frac{20}{3}L^3 + \frac{23L^3}{3} = L^3$$

.... **[3]**

On a finalement :

$$
\begin{array}{c|c|c}
x \in [0; L] & x \in [L; 2L] & x \in [2L; 3L] \\
EIv(x) = F\left(4\frac{x^3}{6} - \frac{11L^2}{6}x\right) & EIv(x) = F\left(2L\frac{x^2}{2} - \frac{11L^2}{6}x - \frac{L^3}{3}\right) & EIv(x) = F\left(-\frac{x^3}{6} + 4L\frac{x^2}{2} - \frac{23L^2}{6}x + L^3\right) \\
EIv(x) = \frac{F}{6}\left(4x^3 - 11L^2x\right) & EIv(x) = \frac{F}{6}\left(6Lx^2 - 11L^2x - 2L^3\right) & EIv(x) = \frac{F}{6}\left(-x^3 + 12Lx^2 - 23L^2x + 6L^3\right)
\end{array}
$$

En posant la variable adimensionnelle $X = \frac{x}{L}$, la flèche adimensionnée $v^*(X) = \frac{6EIv(x)}{FL^3}$ est :

$$
\begin{array}{c|c|c}
X \in [0; 1] & X \in [1; 2] & X \in [2; 3] \\
v^*(X) = (4X^3 - 11X) & v^*(X) = (6X^2 - 11X - 2) & v^*(X) = (-X^3 + 12X^2 - 23X + 6)
\end{array}
$$

. . . . **[2]**

La flèche est maxi en $x = 3L$ ($X = 3$). On a $v^*(3) = 18$. La flèche maxi est :

$$
v(3L) = \frac{18FL^3}{6EI} = \frac{3FL^3}{EI} = 21.4 \text{ mm}
$$

. . . . **[1.5]**

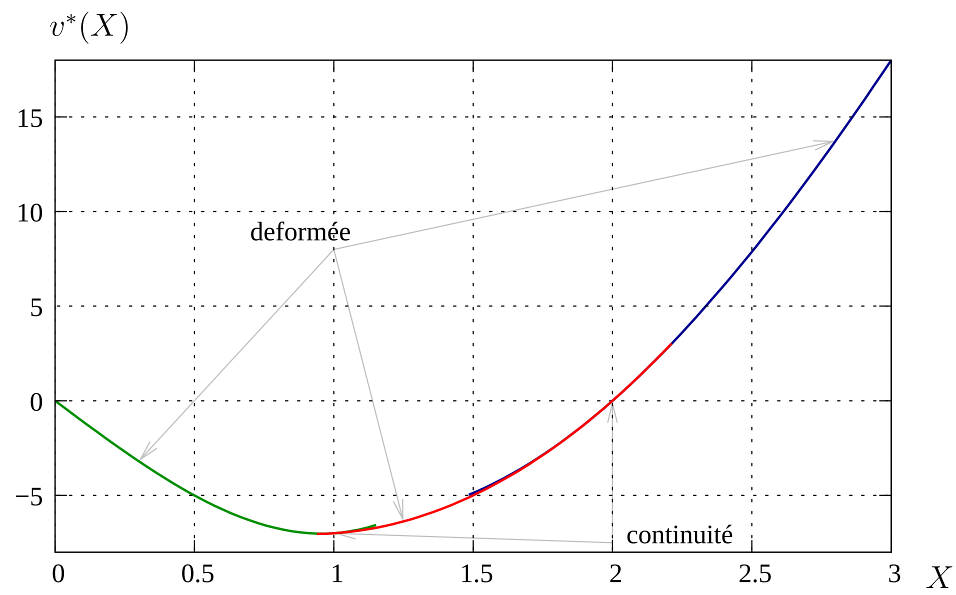


Fig. 1 – Les 3 fonctions, représentant la déformée, présentent une continuité et une pente continue en $X = 1$ et $X = 2$. Cette figure représente la déformée de la poutre amplifiée de 29 environ.

. . . . **[1.5]**