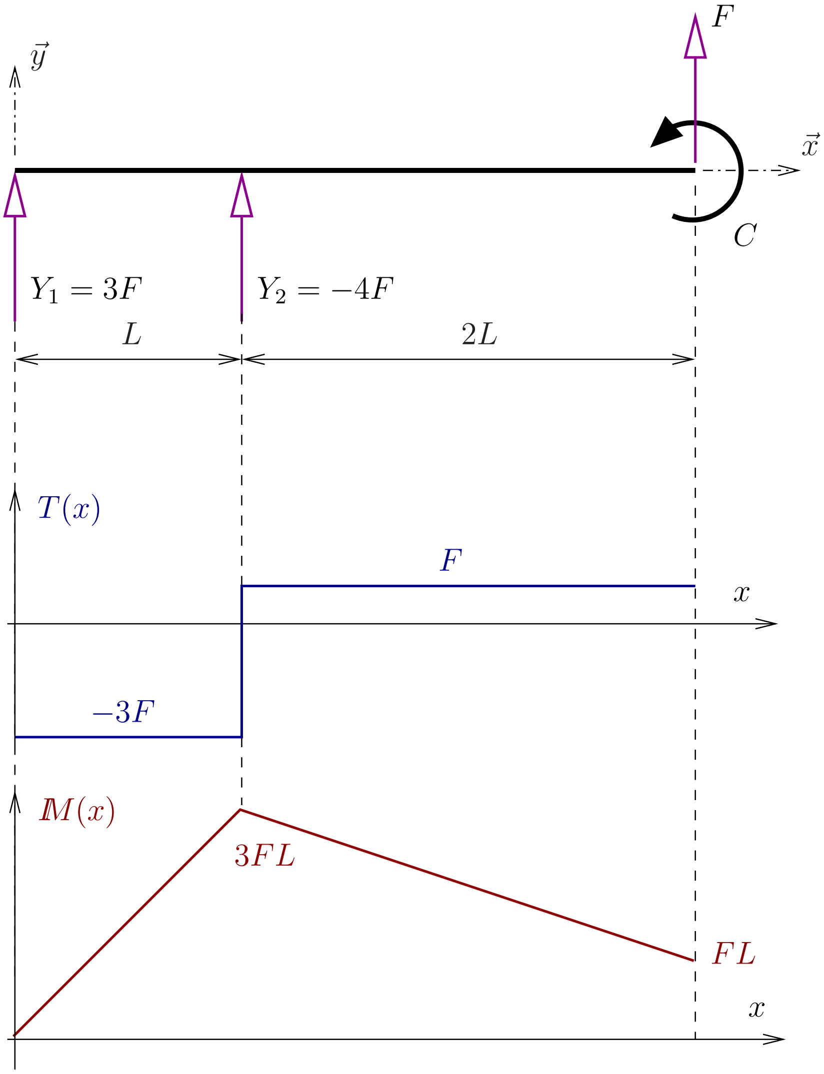
Licence L2 - PCSTM - Parcours Mécanique
UE Méca 1 - Résistance des Matériaux
2$^{\text{nde}}$ session 2016-2017 _ Durée : 1h10
Responsable : L. Blanchard
Eléments de correction



$$\left\{\begin{array}{l} F2L + C - Y_1 L = 0 \\ F3L + C + Y_2 L = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} Y_1 = 3F = 12900 \text{ N} \\ Y_2 = -4F = -17200 \text{ N} \end{array}\right.$$

Vérif : $Y_1 + Y_2 + F = 3F - 4F + F = 0$

La détermination de la flèche se ferait à partir des relations et des conditions suivantes :

$$
\begin{array}{c|c}
x \in [0; L] & x \in [L; 3L] \\
I\!\!M(x) = EIv"(x) = 3Fx & I\!\!M(x) = EIv"(x) = F(-x + 4L) \\
EIv'(x) = F\left(\frac{3}{2}x^2 + A\right) & EIv'(x) = F(-\frac{1}{2}x^2 + 4Lx + D) \\
EIv(x) = F\left(\frac{1}{2}x^3 + Ax + B\right) & EIv(x) = F(-\frac{1}{6}x^3 + 4L\frac{1}{2}x^2 + Dx + G) \\
v(0) = 0 &
\end{array}
$$

$$v(x) \text{ continu en } x = L \text{ et } v(L) = 0$$

$$v'(x) \text{ continu en } x = L$$

Les conditions s'écrivent :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
B = 0 \\
\frac{1}{2}L^3 + AL + B = 0 \\
-\frac{1}{6}L^3 + 4L\frac{1}{2}L^2 + DL + G = 0 \\
\frac{3}{2}L^2 + A = -\frac{1}{2}L^2 + 4L^2 + D
\end{array}
\right.
\quad \Longrightarrow \quad
\left\{
\begin{array}{l}
A = -\frac{1}{2}L^2 \\
DL + G = -\frac{11}{6}L^3 \\
A - 2L^2 = D
\end{array}
\right.
$$

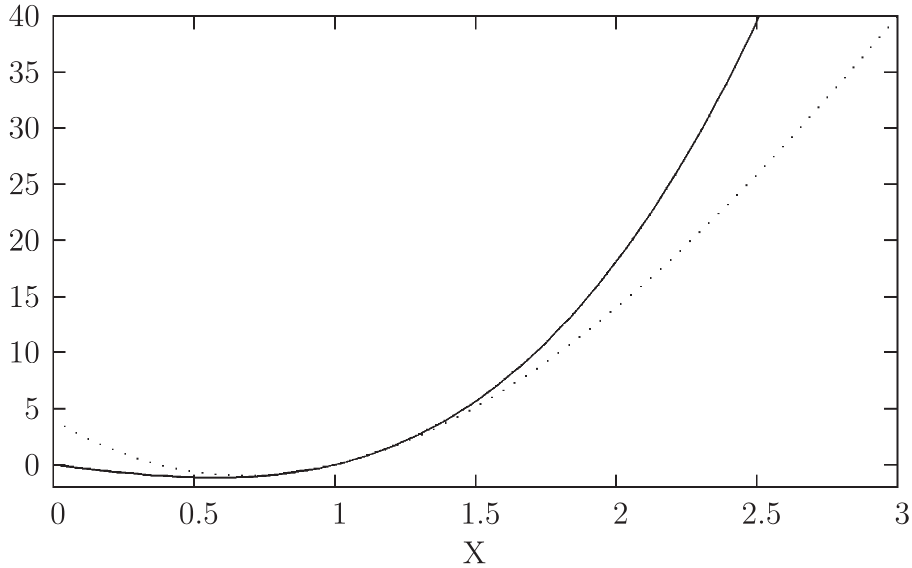
Donc :

$$
D = -\frac{1}{2}L^2 - 2L^2 = -\frac{5}{2}L^2
$$
$$
G = -\frac{11}{6}L^3 + \frac{5}{2}L^3 = \frac{2}{3}L^3
$$

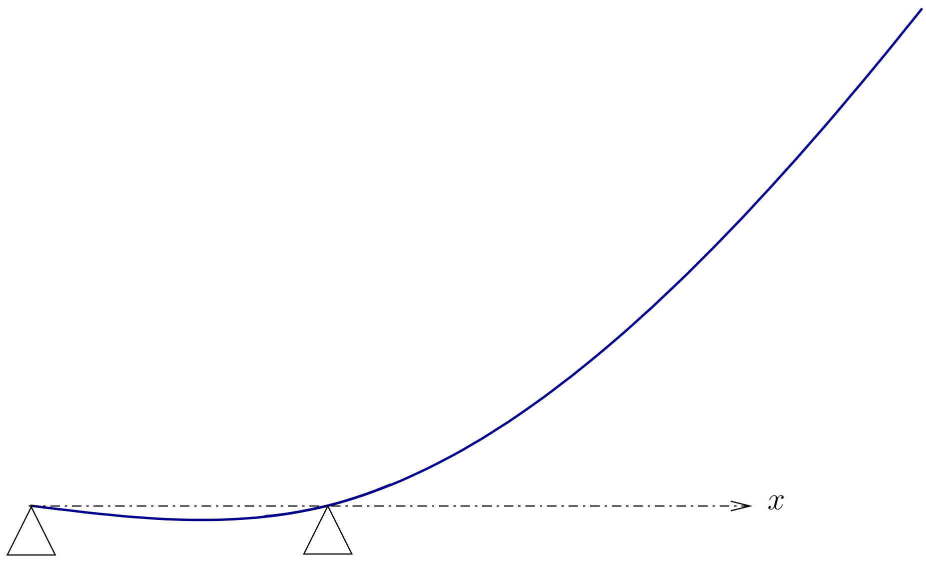
On a alors :

$$
\begin{array}{c|c}
x \in [0; L] & x \in [L; 3L] \\
EIv(x) = F\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}L^2x\right) & EIv(x) = F(-\frac{1}{6}x^3 + 4L\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}L^2x + \frac{2}{3}L^3) \\
EIv(x) = \frac{FL^3}{6}(3X^3 - 3X) & EIv(x) = \frac{FL^3}{6}(-X^3 + 12X^2 - 15x + 4) \\
X = \frac{x}{L} \in [0; 1] & X \in [1; 3]
\end{array}
$$

Le tracé des 2 courbes adimensionnées $\frac{6EIv(x)}{FL^3}$ donne :



soit une allure de déformée amplifiée par environ ... :



La flèche maximum est

$$v(3L) = \frac{20FL^3}{3EI}$$

La contrainte de tension maximum existe en $x = L$ en traction pour $y = -\frac{h}{2}$ et en compression pour $y = +\frac{h}{2}$. Cette intensité de contrainte maxi est

$$\sigma_{Maxi} = \frac{3FL}{I}w = \frac{3FL}{\frac{I}{w}}$$

où $\frac{I}{w}$ est nommé le "module de flexion élastique" dans ce tableau. On souhaite $\sigma_{Maxi} \leq \frac{Re}{s}$. L'égalité donne :

$$\frac{3FL}{\frac{I}{w}} = \frac{Re}{s} \quad \Longrightarrow \quad \frac{I}{w} = \frac{3FLs}{Re} = 28219 \text{ mm}^3 = 28.22 \text{ cm}^3$$

On a alors différents choix :

Dimensions extérieures mm	épaisseur mm	cote suivant $\vec{y}$ mm	I_{xx} ou I_{yy} soit $\frac{I}{w}$ cm^3	masse linéique kg/m
80*60	6	80	29.10	11.30
100*50	5	100	31.64	10.48
100*60	4	100	30.52	9.20
100*80	3	100	29.76	8.01
100*80	4	80	33.54	10.48
120*60	3	120	31.52	8.01
120*60	5	60	32.00	12.84
120*80	3	120	38.37	8.96
120*80	3	80	30.86	8.96
140*40	3	140	31.70	8.01

Le choix porte donc sur le profilé 100*80*3. La contrainte maxi sera alors :

$$\sigma_{Maxi} = \frac{3FL}{I}w = \frac{3FL}{\frac{I}{w}} = 217 \text{ MPa}$$

et le coefficient de sécurité $s = 1.476$.

Pour un profil rectangulaire plein (avec $h = 2b$) :

$$\sigma_{Maxi} = \frac{3FL}{\frac{bh^3}{12}}\frac{h}{2} = \frac{18FL}{bh^2} = \frac{36FL}{h^3} = \frac{R_e}{s} \quad \Longrightarrow \quad h = \left(\frac{36FLs}{R_e}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad h = 69.70 \text{ mm}$$

$$\Longrightarrow \quad b = 34.85 \text{ mm} \quad \Longrightarrow \quad I \approx 983 \text{ cm}^3$$

Le "module de flexion élastique" est bien de la même valeur que précédement :

$$\frac{I}{w} = \frac{bh^3}{12}\frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 28219 \text{ mm}^3$$

La masse de cette poutre est $m = \rho bh3L$ et sa masse linéique est $\rho hb = 19.06$ kg/m soit plus du double que le profil creux.