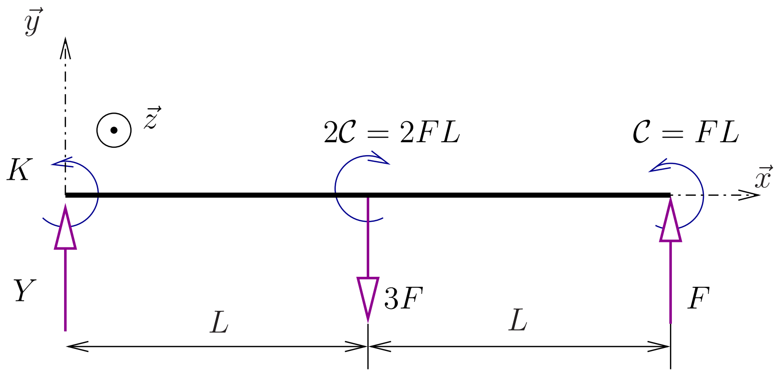
Licence L2 - PCSTM - Parcours Mécanique

Examen Résistance des Matériaux

1ère session 2016-2017 _ Durée : 1h30

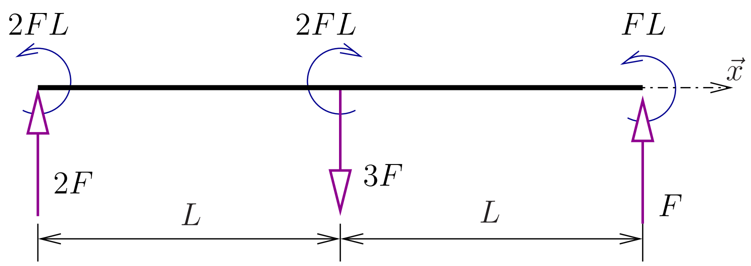
Responsable : L. Blanchard

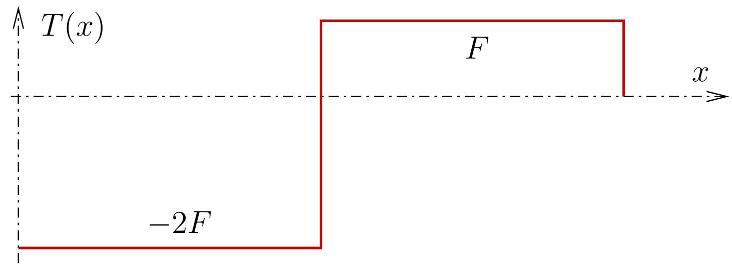
Eléments de correction

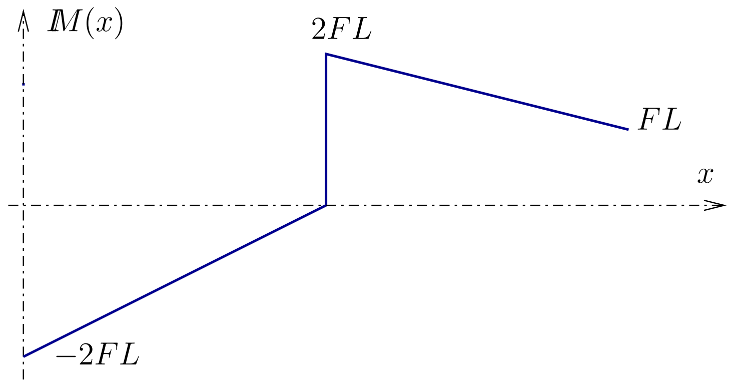


Le **P.F.S.** appliqué à toute la poutre (équation des moments en $x = 0$) donne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y - 3F + F & = & 0 \\ K + \mathcal{C} - 2\mathcal{C} + F\,2L - 3F\,L & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} Y & = & 2F = 1440 \text{ N} \\ K & = & \mathcal{C} + FL = 2FL = 374.4 \text{ N.m} \end{array} \right.$$







$$x \in [0 : L]$$
$$T(x) = -2F$$
$$M(x) = -2FL + 2Fx$$
$$M(x) = 2F(x - L)$$
$$EIv" = F(2x - 2L)$$
$$EIv' = F(x^2 - 2Lx + A)$$
$$\text{or } v'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 0$$
$$EIv = F\left(\frac{x^3}{3} - Lx^2 + B\right)$$
$$\text{or } v(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 0$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(2x^3 - 6Lx^2\right)$$

$$x \in [L : 2L]$$
$$T(x) = F$$
$$M(x) = C + F(2L - x)$$
$$M(x) = F(3L - x)$$
$$EIv" = F(-x + 3L)$$
$$EIv' = F(-\frac{1}{2}x^2 + 3Lx + D)$$
$$EIv = F(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3L}{2}x^2 + Dx + G)$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}(-x^3 + 9Lx^2 + 6Dx + 6G)$$

La continuité de la rotation de section droite (donc de $v'(x)$) en $x = L$ donne :

$$L^2 - 2L^2 = -\frac{1}{2}L^2 + 3L^2 + D \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{7}{2}L^2 \quad \Longrightarrow \quad 6D = -21L^2$$

La continuité de la flèche (donc de $v(x)$) en $x = L$ donne :

$$2L^3 - 6L^3 = -L^3 + 9L^3 + 6DL + 6G \quad \Longrightarrow \quad 6G = -12L^3 + 6\frac{7}{2}L^3 = 9L^3$$

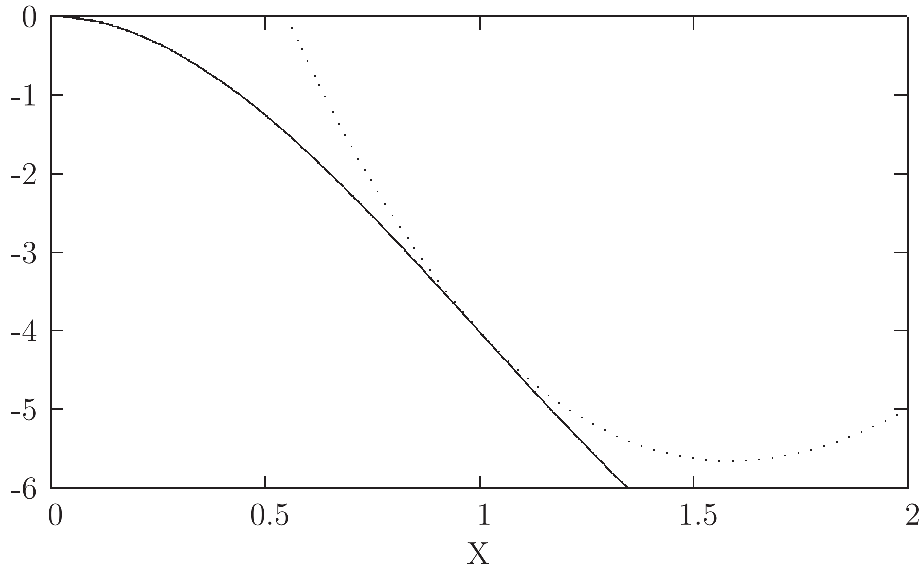
On obtient alors :

$$x \in [0:L], X = \frac{x}{L} \in [0:1] \qquad\qquad x \in [L:2L], X = \frac{x}{L} \in [1:2]$$

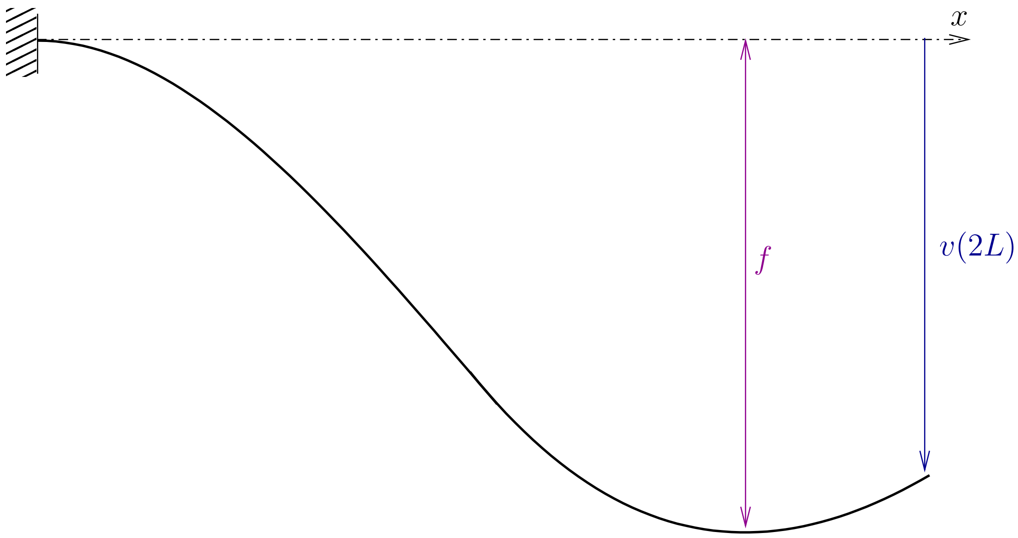
$$EIv(x) = \frac{F}{6}\left(2x^3 - 6Lx^2\right) \qquad\qquad EIv(x) = \frac{F}{6}(-x^3 + 9Lx^2 + 6Dx + 6G)$$

$$EIv(x) = \frac{FL^3}{6}\left(2X^3 - 6X^2\right) \qquad\qquad EIv(x) = \frac{FL^3}{6}\left(-X^3 + 9X^2 - 21X + 9\right)$$

Le tracé des 2 courbes adimensionnées $\frac{6EIv(x)}{FL^3}$ donne :



soit une allure de déformée amplifiée par environ 103 :



$$v(2L) = -\frac{5FL^3}{6EI} \approx -2.63 \text{ mm}$$

La flèche maximum est en $x \approx 1.586L \approx 412$ mm et vaut $f \approx 5.65685\frac{FL^3}{6EI} = 2.98$ mm.

Le moment fléchissant est maximum en $x = 0$ et en $x = L$ et vaut : $\mathbb{M}(0) = -2FL$ et $\mathbb{M}(L) = +2FL$. La contrainte de tension est maximum en ces 2 abscisses et en $y = \pm\frac{h}{2}$ et vaut :

$$\sigma_M = \frac{2FL}{bh^3}12\frac{h}{2} = \frac{12FL}{bh^2} = 78 \text{ MPa} < R_e = 120 \text{ MPa}$$

Le coefficient de sécurité est environ 1.538.

- Pour $x = 0$ et $y = \frac{h}{2}$: traction ;
- Pour $x = 0$ et $y = -\frac{h}{2}$: compression ;
- Pour $x = L$ et $y = \frac{h}{2}$: compression ;
- Pour $x = L$ et $y = -\frac{h}{2}$: traction.

N.B. :

Moment quadratique :

$$I = \frac{bh^3}{12} = 57600 \text{ mm}^4$$