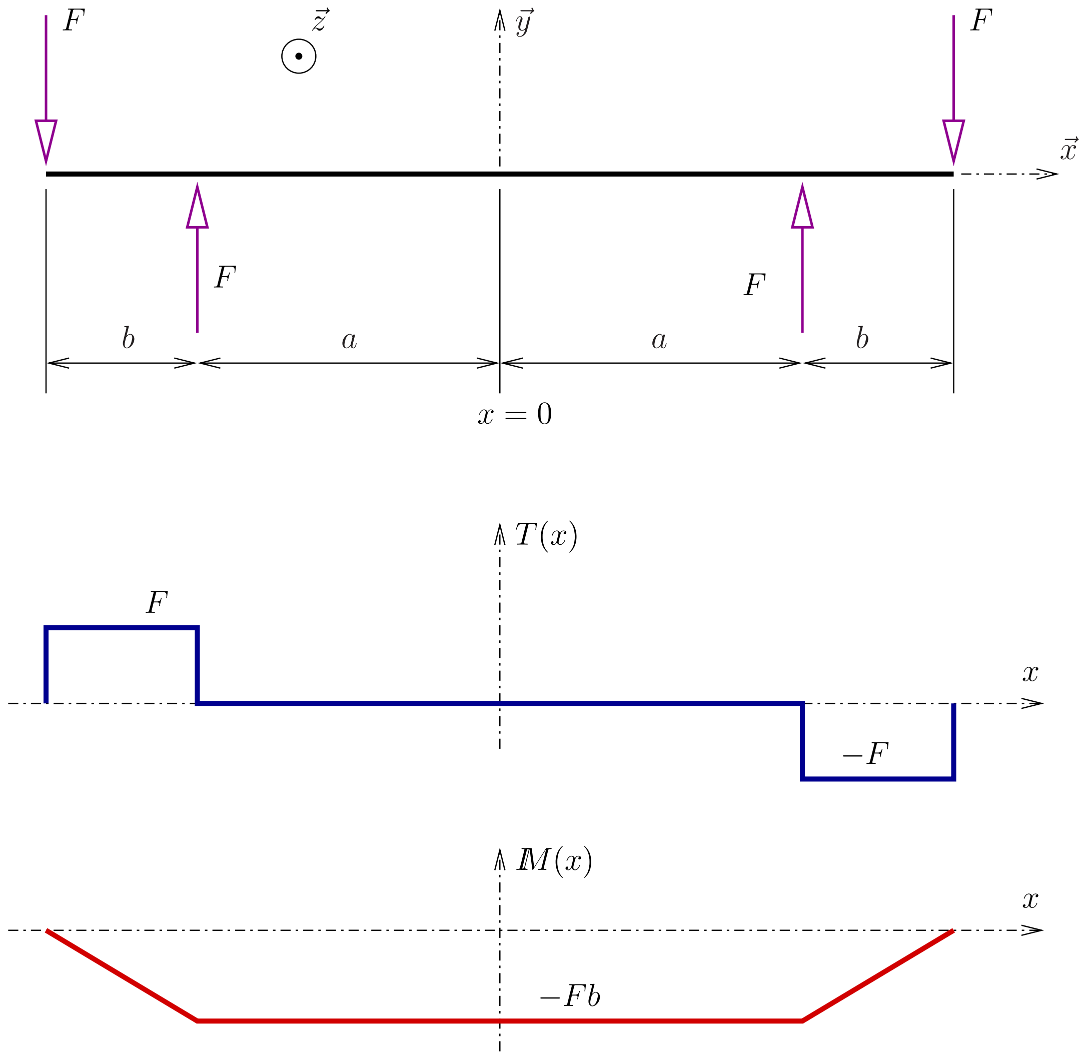
L2 - PCSTM - Parcours Mécanique

Résistance des Matériaux

2^{nde} session 2015-2016 _ Durée : 2h00

Responsable : L. Blanchard

Eléments de correction



$x \in [0 : a]$

$$EIv" = -Fb$$

$$EIv' = -F(bx + A)$$

$$EIv = -F\left(b\frac{x^2}{2} + Ax + C\right)$$

$x \in [a : a + b]$

$$EIv" = F(x - (a + b))$$

$$EIv' = F\left(\frac{x^2}{2} - (a + b)x + B\right)$$

$$EIv = F\left(\frac{x^3}{6} - (a + b)\frac{x^2}{2} + Bx + D\right)$$

La symétrie du problème fait que $v'(0) = 0 \implies A = 0$.

De plus nous devons avoir $v(x)$ et $v'(x)$ continues en $x = a$ et $v(a) = 0$ pour les 2 expressions ce qui s'écrit :

$$b\frac{a^2}{2} + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{2}ba^2$$

$$-ba = \frac{a^2}{2} - (a+b)a + B \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{a^3}{6} - (a+b)\frac{a^2}{2} + Ba + D = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{2} + b\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2} = -\frac{a^3}{6} + b\frac{a^2}{2}$$

On obtient alors :

$x \in [0 : a]$

$$EIv = -F\left(b\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}ba^2\right)$$

$$EIv = Fa^3\left(-b\frac{x^2}{2a^3} + \frac{b}{2a}\right)$$

$$EIv = \frac{Fa^3}{6}\left(-3\beta X^2 + 3\beta\right)$$

$x \in [a : a+b]$

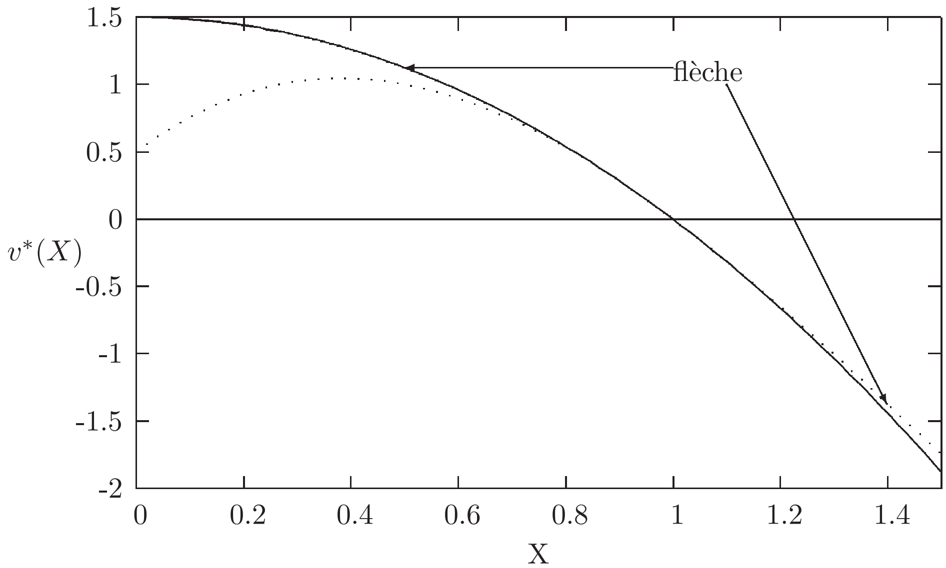
$$EIv = F\left(\frac{x^3}{6} - (a+b)\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}x - \frac{a^3}{6} + b\frac{a^2}{2}\right)$$

$$EIv = Fa^3\left(\frac{x^3}{6a^3} - (a+b)\frac{x^2}{2a^3} + \frac{x}{2a} - \frac{1}{6} + \frac{b}{2a}\right)$$

$$EIv = \frac{Fa^3}{6}\left(X^3 - 3(1+\beta)X^2 + 3X - 1 + 3\beta\right)$$

en posant $X = \frac{x}{a}$ et $\beta = \frac{b}{a}$.

Le tracé des 2 courbes adimensionnées $v^*(X) = \frac{6EIv(x)}{Fa^3}$ donne l'allure de la déformée amplifiée dans le cas où $a = 2b$:



Dans le cas où $a = 2b$, la flèche maximum f n'est pas en $x = 0$ mais en $x = a + b$ où $v^*(1.5) = -1.75 = -\frac{7}{4}$:

$$EIf = \frac{Fa^3}{6}\frac{7}{4} \quad \Longrightarrow \quad f = \frac{7Fa^3}{24EI} = 4.00 \text{ mm}$$

Le moment est extrême sur tout $x \in [-a : +a]$ et vaut $-Fb$.
La contrainte maximum est :

$$\sigma_{Max} = \frac{Fb}{I}R_e = \frac{4Fb}{\pi({R_e}^4 - {R_i}^4)}R_e = 240.5 \text{ MPa}$$

Cette contrainte est en compression pour $x \in [-a : +a]$ et $y = -R_e$ et en traction pour $x \in [-a : +a]$ et $y = +R_e$.

$$m^* = \frac{26.7}{8.5} \approx 3.14$$

La contrainte est obtenu à partir de :

$$\sigma = \frac{\mathbb{M}}{I} y = \frac{\mathbb{M}}{W}$$

où W est appelé le module de résistance sur le document fourni.

$$\sigma^* = \frac{W(IPN100)}{W(IPN200)} = \frac{34.2}{214} = \frac{1}{6.257}$$

La flèche est obtenue par un terme en $\frac{FL^3}{EI}$ où seul I change donc :

$$f^* = \frac{I(IPN100)}{I(IPN200)} = \frac{171}{2140} = \frac{1}{12.51}$$

Donc l'IPN200 est plus de 3 fois plus lourd, se déforme plus de 12 fois moins et est plus de 6 fois plus résistant environ que l'IPN100.